Mister PREPA

Tout savoir sur : La fonction Gamma

Soit Γ la fonction réelle définie par $\Gamma(\mathrm{x}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1. **Déterminer l'ensemble de définition de $\boldsymbol{\Gamma}$.**

Pour x un réel fixé, on pose la fonction $f(t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)lnt}e^{-t}$. Cette fonction est alors continue et positive sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ en effet $e^{-0} = 1$.

Or d'après la règle des équivalents, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ est convergente si et seulement si $1 - x < 1$ $i.e$ $x > 0$.

Ainsi, on en déduit que $\int_0^1 f(t)dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

- Au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2\, t^{x-1}e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}\, e^{-t} = 0$,

d'après les croissances comparées.

Alors il existe $A > 0$, tel que $t \geq A \Rightarrow f(t) \leq \frac{1}{t^2}$, d'après la définition d'une limite.

Alors la convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ implique par majoration, la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

Ainsi, la fonction $x \to \Gamma(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

2. **Démontrer que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^*$, $\boldsymbol{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$.**

Pour $\varepsilon > 0, A > \varepsilon$ et $x \in \ ]\varepsilon, A[$, posons une intégration par parties,

$$\begin{cases} u(t) = e^{-t} \Rightarrow u'(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = t^{x-1} \Rightarrow v(t) = \dfrac{t^x}{x} \end{cases}$$

Ainsi, $\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}dt = [e^{-t}\frac{t^x}{x}]_\varepsilon^A + \frac{1}{x}\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}dt$

Or $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} e^{-t}\frac{t^x}{x} = \lim\limits_{A \to +\infty} e^{-t}\frac{t^x}{x} = 0$, de plus toutes les intégrales convergent.

Alors $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

3. En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n$: "$\Gamma(n) = (n-1)!$ "

- Pour n = 1, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

  Soit $A > 0$, $\int_0^A e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^A = -e^{-A} + 1$.

  Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} -e^{-A} = 0$ par croissances comparées.

  Donc , $\Gamma(1) = 1 = (1-1)! = 0!$, H_1 est vraie.

- Soit $n \geq 1$ tel que H_n soit vraie ,

  $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n * (n-1)\,! \text{ d'après } H_n$$

  D'où , $\Gamma(n+1) = n!$ D'où H_{n+1} vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!}$$