ECRICOME PREPA ECS

MATHS option scientifique

500504

IVARD

MARVIN

13/12/2000

Note de délibération : 20 / 20

Correction 1 :
Appréciation :

Numéro d'inscription 500504

Né(e) le 13 / 12 / 2000

Signature

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 09

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1

1)a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_2(X) = 2X T_1(X) - T_0(X)$

$= 2X \times X - 1$

$= 2X^2 - 1$

donc $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T_3(X) = 2X T_2(X) - T_1(X)$

$= 2X(2X^2 - 1) - X$

$= 4X^3 - 2X - X = 4X^3 - 3X$

donc $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n : « $\deg T_n = n$ ».

· pour $n = 1$, $T_1 = X$ et $\deg T_1 = 1$ et $T_2 = 2X^2 - 1$ d'où $\deg T_2 = 2$ d'où H_1 est vraie.

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n et H_{n-1} soient vraies

$T_{n+1}(X) = 2X T_n(X) - T_{n-1}(X)$

Or $\deg T_n = n$ donc $\deg(2X T_n) = 1 + n = n+1$

et $\deg T_{n-1} = n-1$.

donc $\deg T_{n+1} = \deg(2X T_n) = n+1$ d'où H_{n+1} est vraie

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

· D'après l'axiome de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg T_n = n}$$

c). On a $T_0 = 1$ donc $T_0 \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

alors $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes non nuls de degré deux à deux distincts.

et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $T_k \in \mathbb{R}_n[X]$, d'après les degrés

donc $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

Or $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, tout comme le nombre d'éléments qui composent la famille $(T_0, \dots, T_n)$.

Alors $\begin{cases} (T_0, \dots, T_n) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}_n[X] \\ \dim(T_0, \dots, T_n) = \dim \mathbb{R}_n[X]. \end{cases}$

$$\boxed{\text{Alors } (T_0, \dots, T_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

2(a) On a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\cos((n+2)x) + \cos(nx) = \cos(nx + 2x) + \cos(nx)$.

Or $nx \in \mathbb{R}$ et $2x \in \mathbb{R}$.

On pose ~~$a = nx$ et $b = 2x$~~

$a = (n+1)x$ et $b = x$ car $a + b = (n+2)x$ et $a - b = nx$.
et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

donc $\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\\ \cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)\end{array}}$$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : « $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$ »

- pour $n=0$, $T_0 = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, T_0(\cos x) = 1$.

  Or $\cos(0 \times x) = \cos(0) = 1$ D'où H_0 vraie.
- pour $n=1$, $T_1 = X$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_1(\cos x) = \cos x$

  Or $\cos(1 \times x) = \cos(x)$ D'où H_1 vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_{n-1} et H_n soient vraies.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, T_{n+1}(\cos x) &= 2\cos(x) T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)\\ &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x)\\ &= \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) - \cos((n-1)x)\end{aligned}$$

d'après 2)a) en appliquant l'égalité pour $j = n-1$

$$= \cos((n+1)x).$$

d'où H_{n+1} vraie.

- D'après l'axiome de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)}$$

3)a) P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ donc P et Q donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

donc $t \longmapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ comme produit de fonctions de ce type et $\sqrt{1-t^2} \neq 0$ sur $]-1,1[$.

Or $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}$

donc $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{1}{\sim} \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2(1-t)}} = \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}(1-t)^{1/2}}$

donc $\left|\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \underset{1}{\sim} \dfrac{|P(1)Q(1)|}{\sqrt{2}(1-t)^{1/2}}$.

Or $1/2 < 1$ donc $\int_0^1 \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}\,dt$ converge

comme intégrale de Riemann convergente

donc $\int_0^1 \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge absolument par théorème de comparaison des ~~fonctions~~ intégrales à terme général positif car $\left|\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \geq 0$.

donc $\int_0^1 \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

$\left|\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| = \left|\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}\right| \underset{-1}{\sim} \left|\dfrac{P(-1)Q(-1)}{\sqrt{2(1+t)}}\right|$.

Or $1/2 < 1$ donc $\int_{-1}^0 \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}\,dt$ converge

comme intégrale de Riemann convergente.

Donc comme précédemment $\int_{-1}^0 \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

$$\boxed{\text{D'après Chasles } \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est convergente}}$$

Numéro d'inscription 500504

Né(e) le 13/12/2000 Signature

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 09

b) $\varphi(P,Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

φ est définie car $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente

φ est ~~symétri~~ linéaire à gauche par distributivité du produit de réel et par linéarité de l'intégrale convergente
φ est symétrique par commutativité du produit de réel et par linéarité de l'intégrale convergente

Donc φ est bilinéaire.

$\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

Or $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ donc par ~~croissan~~ positivité de l'intégrale sur des bornes croissantes

$\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \geq 0.$

Si $\varphi(P,P)=0$ alors $\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0.$

Or $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ donc $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$

$\Rightarrow \forall t \in \underbrace{]-1,1[}_{=I}$, $P^2(t)=0$ car $\sqrt{1-t^2} \neq 0$ sur I

5

donc $\forall t \in]-1,1[$, $P(t)=0$.

alors P admet une infinité de racines sur $]-1,1[$.

donc $P=0$.

Alors φ est définie-positive

$\boxed{\text{Finalement, } \varphi \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

c) $n \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, on a $n \neq m$.

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right)$$

d'après l'énoncé.

~~donc~~ De plus, $x \mapsto \cos(nx)\cos(mx)$ est continue sur $[0,\pi]$.

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n-m)x))\,dx.$$

Or $n+m \neq 0$ ~~et~~ car $(n,m) \in \mathbb{N}^2$

et $n-m \neq 0$ car distincts

$$\text{Alors } \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^{\pi}$$

Or $\sin(0)=0$

et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\sin(k\pi)=0$

donc $\sin((n+m)\pi)=0$

et $\sin((n-m)\pi)=0$

donc $\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 0=0.$

$$\boxed{\text{Donc } \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ n\neq m,\ \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)dx=0}$$

d) $n\neq m$, $\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Or $x\mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $]0,\pi[$ vers $]-1,1[$.

donc $t=\cos(x)$ est un changement de variable valide.

On pose $t=\cos(x)$

$\frac{dt}{dx}=-\sin(x)$ et $dt=-\sin(x)dx$.

alors $\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_\pi^0 \frac{T_n(\cos x)T_m(\cos x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}(-\sin(x)dx)$

$= \int_0^\pi \frac{\cos(nx)\cos(mx)}{\sqrt{\sin^2(x)}}\sin(x)dx.$

Or $\sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)|$ Or $\forall x\in[0,\pi]$, $\sin(x)\geqslant 0$.

$= \sin(x)$.

$= \int_0^\pi \frac{\cos(nx)\cos(mx)}{\sin(x)}\sin(x)dx = \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)dx = 0$

car $n\neq m$

+

$\boxed{\text{donc si } n \neq m,\ \langle T_n, T_m \rangle = 0}$

e) $\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$= \int_0^{\pi} \cos^2(nx)\,dx$ en raisonnant de la même façon que ~~tout~~ dans la question précédente

Si $n=0$, $\cos(nx) = \cos(0) = 1$

donc $\|T_0\|^2 = \int_0^{\pi} 1\,dx = \pi$

Si $n \geq 1$, $\|T_n\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2(nx)\,dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2nt)}{2}\,dt$

car $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) = \frac{1+\cancel{2}\cos(2t)}{2}$.

$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(2nt)\,dt$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi}$ car $2n \neq 0$ car $n \geq 1$

Or $\sin(0)=0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sin(k\pi) = 0$

$= \frac{\pi}{2}$

Numéro d'inscription 500504

Né(e) le 13/12/2000

Nom IVARD

Prénom (s) ΠARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/09

Alors $\boxed{\|T_n\|^2 = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } n \geq 1 \\ \pi & \text{si } n = 0 \end{cases}}$

4) On sait que si $n \neq m$, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$

donc la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a juste à les normer par le produit scalaire $\langle , \rangle$.

$\boxed{\text{d'après 3/e). } \left(\frac{1}{\pi} T_0, \frac{2}{\pi} T_1, \dots, \frac{2}{\pi} T_n\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].}$

4) $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, or $\left(\frac{T_k}{\|T_k\|^2}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

donc $\exists! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$

Or $\langle X^n, T_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{T_k}{\|T_k\|^2}, T_j \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{\|T_k\|^2} \langle T_k, T_j \rangle$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or (T_k) est une famille orthogonale.

donc $\langle X^n, T_j \rangle = \sum a_j \frac{1}{\|T_j\|^2} \langle T_j, T_j \rangle$ le reste est nul

$= a_j \frac{\|T_j\|^2}{\|T_j\|^2} = a_j$

Or par unicité des a_j On a $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $a_j = \langle X^n, T_j \rangle$.

$$\boxed{\text{donc } X^n = \sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}}$$

b) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P = \sum_{k=0}^{n-1} \langle P, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$

$\deg X^n = n$.

Or p_F le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d'où $\|X^n - P\|^2 = \|X^n - p_F(X^n) - (P + p_F(X^n))\|^2$

$= \|X^n - p_F(X^n)\|^2 + \|P + p_F(X^n)\|^2$

d'après le théorème de Pythagore.

Il y a minimisation lorsque $\|X^n - p_F(X^n)\|^2 = 0$

ie $X^n = p_F(X^n)$.

Or en décomposition dans une base orthonormale ~~$p_F(X^n) = \langle X^n$~~

$P_F(X^4) = \langle X^4, T_4\rangle \dfrac{1}{\|T_4\|^2}$

donc $d_4^2 = \langle X^4, T_4\rangle^2 \dfrac{1}{\|T_4\|^2}$

$$\boxed{\text{alors} \quad d_4 = \frac{|\langle X^4, T_4\rangle|}{\|T_4\|}}$$

c) $d_2 = \dfrac{|\langle X^2, T_2\rangle|}{\|T_2\|}$

$\|T_2\|^2 = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\|T_2\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ car tout est positif

car $x \mapsto \sqrt{x}$ réalise une bijection sur $\mathbb{R}_+$.

$\langle X^2, T_2\rangle = \langle X^2, 2X^2 - 1\rangle$

$= 2\langle X^2, X^2\rangle - \langle X^2, 1\rangle$

$= 2\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$= 2\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4(x)\,dx - \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$

$= 2\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx - \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx$

$= \dfrac{2}{4}\displaystyle\int_0^{\pi} (1+\cos(2x))^2\,dx - \frac{\pi}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} (1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx - \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx + \int_0^{\pi} \cos(2x) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2(2x)\,dx - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)dx - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos(4x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\underbrace{\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

donc $d_2 = \dfrac{\left|\frac{\pi}{4}\right|}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{\pi}{4} \times \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{16}} \times \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\boxed{\text{donc } d_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}}$$

<u>Exercice 2</u>

1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

(a) $\sum u_n$ converge si et seulement $\alpha > 1$ alors elle converge comme série de Riemann convergente

2) $k \geq 2$, $\forall t \in [k, k+1]$, $0 < k \leq t \leq k+1$

~~donc~~ $\cancel{\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}}$

Numéro d'inscription 50050 4

Né(e) le 13/12/2000 Signature

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 04/09

Or par croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \le k^\alpha \le t^\alpha \le \cancel{(k+1)^\alpha}$$

donc $0 \le \frac{1}{t^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha}$.

On intègre t sur k et k+1 qui sont des bornes croissantes

donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \le (k+1-k)\frac{1}{k^\alpha}$

ie $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha}$.

$\forall t \in [k-1, k]$, $k \ge 2$, $0 < k-1 \le t \le k$.

de même $0 < k^\alpha \le t^\alpha \le (k-1)^\alpha$

alors $\cancel{0 \le}\ \frac{1}{t^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha}$.
$0 \le \frac{1}{(k-1)^\alpha}$

On intègre t sur $[k-1, k]$ qui est une borne croissante

alors $(k-(k-1))\frac{1}{(k-1)^\alpha} \le \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

i.e $\dfrac{1}{(k-1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t^\alpha}$.

Or $0 \leq k-1 < k$

donc $0 < (k-1)^\alpha < k^\alpha$

donc $\dfrac{1}{k^\alpha} \leq \dfrac{1}{(k-1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t^\alpha}$.

$$\boxed{\text{donc } \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}}$$

c) ~~Soit N assez grand~~ On suppose $\alpha > 1$

Or $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \left[\dfrac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_k^{k+1}$ car $1-\alpha > 0$

$= \dfrac{1}{(1-\alpha)}\left(\dfrac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$.

de même $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \left[\dfrac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{k-1}^{k} = \dfrac{1}{(1-\alpha)}\left(\dfrac{1}{k^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}}\right)$

Soit $N > n+1$

On somme k de $n+1$ à N, alors par télescopage.

$$\underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)}_{A_N} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)}_{B_N}$$

Or $\lim_{N \to +\infty} A_N = \frac{1}{1-\alpha}\left(-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$

car $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} = 0$

et de même $\lim_{N \to +\infty} B_N = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

et $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = R_{1,n}$ car $\alpha > 1$

donc $\forall n \geq 1, \forall \alpha > 1, \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

par algèbre des limites

d). $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} > 0$ pour n assez grand.

donc on suppose n assez grand alors on divise l'inégalité

par $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \times (\alpha-1)n^{\alpha-1} \leq 1.$

Or $\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = 1.$

donc par théorème d'encadrement

$\lim_{n \to +\infty} R_{1,n} \times (\alpha-1)n^{\alpha-1} = 1.$

donc $R_{1,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

e) On reconnaît une série de Riemann
il est nécessaire et suffisant que $\alpha - 1 > 1$
i.e $\alpha > 2$.
pour que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2

f) Conjecture : $\sum u_n$ converge à l'ordre p si et seulement si $\alpha > p$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$

a) ~~$n > 1$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge comme série de Riemann convergente~~

$u_n = \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ or $\left|\frac{1}{n}\right| < 1$ car $n \in \mathbb{N}^*$

donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge comme série géométrique convergente

b) $\forall k \geq 3$, $0 < 3 \leq k$
par bijection de $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$

On a $0 < 3^k \leq k^k$
donc $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{3^k}$

donc $\forall k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$

Numéro d'inscription S0050 4

Né(e) le 13/12/2000

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 09

Commencez à composer dès la première page...

Soit $N \geq 2$.

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{3^k}$$

$$\text{Or } \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{(1/3)^{n+1} - (1/3)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\right)$$

$$\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad \text{car } \left|\frac{1}{3}\right| < 1$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2 \times 3^n}$$

$$\text{et } \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k = R_{1,n} \quad \text{car } \sum u_n \text{ converge.}$$

$$\boxed{\text{donc } \forall n \geq 2, \quad 0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \times 3^n}}$$

17

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

c) donc $0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2\times 3^n}$ donc $\sum R_{1,n}$ converge par comparaison à une série convergente $\left|\frac{1}{3}\right|<1$

de même $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2\times 3^k} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n} = \frac{1}{4\,3^n}$

et $\sum u_n$ converge

donc

$$\boxed{\forall n\geq 1, \quad 0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4\times 3^n}}$$

d) On pose $\forall p \geq 1$, « $\sum u_n$ converge à l'ordre p et $\forall n\geq 1,\ 0\leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p\, 3^n}$ ».

• pour $p=1$, $\sum u_n$ converge à l'ordre 1 d'après 2(a)

et $0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2\times 3^n}$ pour $n\geq 2$.

montrons le pour $n=1$, $R_{1,1} = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^k} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$

Or $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\right)$

$= \left(2-1-1/2\right) = \left(1-1/2\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\times 3^n}$ pour $n\geq 1$.

d'où H_1 vraie

• Soit $p \geq 1$ tel que H_p soit vraie.

On a $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p 3^n}$.

donc $0 \leq R_{p,k} \leq \frac{1}{2^p 3^k}$ Or $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

donc $\sum_{k \geq} R_{p,k}$ converge.

et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p 3^k} = \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1}{3^n}$

donc $\underbrace{0 \leq}_{} R_{p+1,n} \leq \frac{1}{2^p 3^n}$

par positivité de tous les termes de la somme. d'où H_{p+1} est vraie

• D'après l'axiome de récurrence

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall p \geq 1, \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et} \\ \forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p 3^n} \end{array}}$$

e) $0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n 3^n} = \frac{1}{(2 \times 3)^n} = \frac{1}{6^n}$

Or $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$.

$$\boxed{\text{donc par comparaison } \sum_{n \geq 1} R_{n,n} \text{ converge}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

a) $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq t \leq 1$

$$1 \leq t+1 \leq 2.$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

Or $t^n \geq 0$ car $t \in [0,1]$

donc

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

par croissance de l'intégrale sur des bornes croissantes

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{donc par théorème d'encadrement } \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0}$$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t)^n dt$$

Or $t \in [0,1]$, donc $-t \neq 1$.

20

Numéro d'inscription S00504

Né(e) le 13/12/2000

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/09

Commencez à composer dès la première page...

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t)^n \, dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

tout converge car continue

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

$$\boxed{\text{donc } \sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{t+1} dt}$$

c) $\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt = (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

car $\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt = 0$ d'après 3(a).

donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2)$.

Or $R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$= \ln(2) - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

21

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$R_{1,n} = \ln(2) - \ln(2) + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$

$= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$

$\boxed{\text{donc } \forall n \geq 0, \quad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt}$

d) On pose $\forall p \geq 1$, H_p : « la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et $\forall n \geq 0 : R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$ »

· pour $p = 1$, $\sum u_n$ converge à l'ordre 1 et $R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}}{(1+t)} dt$ d'où H_1 vraie

- Soit $p \geq 1$ tel que H_p soit vraie.

$R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt$ sous réserve de convergence.

Soit $N \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{N} \int_0^1 \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=n+1}^{N} (-t)^k dt$

$= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \left(\frac{(-t)^{n+1} - (-t)^{N+1}}{1+t} \right) dt$

$$= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{(1+t)^{p+1}} dt$$

Or ~~$0 \leqslant \int_0^1 (-t)^{N+1}$~~

Or $\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{(1+t)^{p+1}} dt = (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{(t)^{N+1}}{(1+t)^{p+1}} dt$

Or $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t)^{p+1}} dt \leqslant \underbrace{\int_0^1 t^{N+1} dt}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}$

donc par encadrement $\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(1+t)^{p+1}} dt = 0$

donc aussi par produit $\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{(1+t)^{p+1}} dt = 0$.

donc $\sum u_n$ converge à l'ordre $p+1$

et $R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{· D'après l'axiome de récurrence :} \\ \quad \forall p \geqslant 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge à l'ordre } p \\ \quad \text{et } \forall n \geqslant 0,\ R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt \end{array}}$$

Problème

Partie A

1)

2) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\lambda X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_{\lambda X}(x) = P(\lambda X \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{\lambda}\right)$ car $\lambda > 0$.

On dérive là où on peut

$$f_{\lambda X}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{t}{\lambda}\right) = e^{-\lambda \frac{t}{\lambda}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{1-1} e^{-t}}{\Gamma(1)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

donc $\lambda X \hookrightarrow \gamma(1)$.

On a l'équivalence.

$$\boxed{\text{On } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ ssi } \lambda X \hookrightarrow \gamma(1)}$$

Numéro d'inscription 500504

Né(e) le 13/12/2000 Signature

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 07/09

Commencez à composer dès la première page...

3) $S_n = \sum_{k=1} X_k$

$\lambda S_n = \lambda \sum_{k=1}^{n} X_k = \lambda X_1 + \quad \dots + \lambda X_n$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda X_i \hookrightarrow \gamma(1)$.

par indépendance des (X_i) donc indépendance des λX_i par le lemme des coalitions et par stabilité de la loi gamma alors $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$

$$\boxed{f_{\lambda S_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-1} e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} & \text{si } t > 0 \end{cases}}$$

4) Si $\forall \omega \in [N_t(\omega) \geq n]$ alors ~~la~~ ~~donc~~ $\sup\{n \in \mathbb{N}, S_n(\omega) \leq t\} \geq n$

donc $[S_n(\omega) \leq t]$ car les (S_i) sont rangés dans l'ordre croissant car les (X_i) sont à valeurs positives.

Si $\forall \omega \in \Omega$ $[S_n(\omega) \leq t]$ alors $[N_t(\omega) \geq n]$ car il y a au moins n (X_i) tel que $(S_n(\omega) \leq t)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$\boxed{\text{donc} \quad [N_t \geq n] = [S_n \leq t]}$

5) Or $[N_t = n] = [N_t \geq n] \setminus [N_t \geq n+1]$

donc $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)$

$= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$

$= P(\lambda S_n \leq \lambda t) - P(\lambda S_{n+1} \leq \lambda t)$ car $\lambda > 0$

Or $\lambda t > 0$ $\quad = \displaystyle\int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1} e^{-u}}{(n-1)!} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n e^{-u}}{n!} du$

$$\boxed{\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du}$$

6) Or $\displaystyle\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\lambda t} u^{n-1} e^{-u} du$ $\quad \begin{cases} a(u) = e^{-u} & a'(u) = -e^{-u} \\ b'(u) = u^{n-1} & b(u) = \dfrac{u^n}{n} \end{cases}$

a et b C^1 sur $[0, \lambda t]$.

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\lambda t} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{1}{(n-1)!} \left(\left[\frac{u^n}{n} e^{-u} \right]_0^{\lambda t} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n} e^{-u} du \right)$$

$= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$

donc $P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$

$+ \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

$$\boxed{\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

~~donc $N_t \hookrightarrow$~~

de plus $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

$$\boxed{N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)}$$

7) a)

```
function U= simulation_S (n,lambda)
    A= grand(n, 1, "exp", 1/lambda).
    Y= sum(A[1:n, j]).
   U= (1/λ)* Y.
endfunction
```

b)

```
function V= simulation_N (t, lambda)
    V= grand(1, 1, "poi", lambda * t).
endfunction
```

c) function L= evolution_S(t, lambda)

```
L=[]
S= grand(1,1, "exp", 1/ lambda)
while S <= t
    L= [L,S]
    S= S+ grand(1,1,"exp", 1/lambda)
end
endfunction
```

d) On complète par iv) plot2d([i, S(i+1)],[i,i])

e) Dans ce cas

$$\boxed{N_{3,2} = 3 \text{ et } N_{5,5} = 5}$$

$S_2 = \sum_{k=1}^{2} X_k = X_1 + X_2$ Or ici $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1) = \gamma(1)$

donc $S_2 \hookrightarrow \gamma(2)$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $P(S_2 \leq t) = \int_0^t \frac{u e^{-u}}{\Gamma(2)} du$

$$\begin{cases} a(u) = u & a'(u) = 1 \\ b'(u) = e^{-u} & b(u) = -e^{-u} \end{cases}$$

Par IPP

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $P(S_2 \leq t) = \left[-ue^{-u}\right]_0^t + \int_0^t e^{-u} du$

$= -te^{-t} + \left[-e^{-u}\right]_0^t$

$= -te^{-t} - e^{-t} + 1$

$= e^{-t}(-t-1) + 1$

Numéro d'inscription: S 0 0 S 0 4

Né(e) le: 1 3 / 1 2 / 2 0 0 0

Signature: Ivard

Nom: I V A R D

Prénom (s): M A R V I N

20 / 20

Ecricome — Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Commencez à composer dès la première page...

donc $P(S_2 \leq t) = \begin{cases} e^{-t}(-t-1)+1 & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$X_4 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ $\quad P(X_4 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{si } t>0 \end{cases}$

Partie B

8) a) $p_0(0) = P(N_0 = 0) = 1$ car (H_1) $N_0 = 0$

$\boxed{\text{donc } p_0(0) = 1}$

b) $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont même loi donc

$P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = P(N_h \geq 0) = 1$

car (H_1) $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$

$\boxed{\text{donc le processus est croissant}}$

9)(a) $N_t + (N_{t+h} - N_t) = N_t + N_{t+h} - N_t = N_{t+h}$.

$p_0(t+h) = P(N_{t+h} = 0) = P(N_t + (N_{t+h} - N_t) = 0)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or $N_{t+h} - N_t$ et N_t sont à valeurs positives
car le processus est croissant et $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$

donc $p_0(t+h) = P((N_t = 0) \cap (N_{t+h} - N_t = 0))$

Or $N_{t+h} - N_t$ et N_t sont indépendantes

$= P(N_t = 0)\, P(N_{t+h} - N_t = 0)$

$= P(N_t = 0)\, P(N_h = 0)$ car $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont même loi

$= p_0(t)\, p_0(h)$

$$\boxed{\text{donc } \forall (t,h) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad p_0(t+h) = p_0(t)\, p_0(h)}$$

b) $t, h \in \mathbb{R}_+$ donc $t+h \geq t \geq 0$.

alors $p_0(t+h) - p_0(t) = p_0(t)\, p_0(h) - p_0(t)$

$= p_0(t)\,(p_0(h) - 1)$

Or $\forall h > 0$, $P(N_h = 0) = p_0(h) < 1$ (H_2)

donc $p_0(t+h) - p_0(t) < 0$

$p_0(t+h) < p_0(t)$

$$\boxed{p_0 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}_+$

$$p_0(ns) = P(N_{ns} = 0)$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : « $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $p_0(ns) = (p_0(s))^n$ ».

· pour $n=0$, $p_0(0) = 1$ et $(p_0(s))^0 = 1$ d'où H_0 vraie.

· Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie.

$$p_0((n+1)s) = p_0(ns+s) = p_0(ns)\,p_0(s) \text{ d'après 9) a)}$$
$$= (p_0(s))^n p_0(s)$$
$$= (p_0(s))^{n+1}$$

d'où H_{n+1} est vraie.

· D'après l'axiome de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad p_0(ns) = (p_0(s))^n}$$

~~$s \in \mathbb{R}_+$, on pose $s = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}_+$~~ avec $n \in \mathbb{N}^*$

~~et on pose $n = m$~~

~~donc $p_0\left(\frac{m}{n}\right) = \left(p_0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m$~~

On pose $s = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}_+$ car $n \in \mathbb{N}^*$.

$$p_0\left(n \times \frac{m}{n}\right) = \left(p_0\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n$$

i.e. $p_0(m) = \left(p_0\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n$

Or $p_0(m) = p_0(m \times 1) = (p_0(1))^m$

donc $\left(p_0\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n = (p_0(1))^m$

tout est positif et par bijection de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\text{On a} \quad p_0\left(\frac{m}{n}\right) = \left(p_0(1)\right)^{m/n}}$$

d) $p_0(1) = e^{-\lambda}$

donc $p_0\left(\frac{m}{n}\right) = \cancel{\left(e^{-\lambda t}\right)^{m/n}}$

$= \left(e^{-\lambda}\right)^{m/n}$

On pose $\frac{m}{n} \leq t \leq \frac{m+1}{n}$ ~~tel~~ tel que

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n} = t = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m+1}{n}$

Alors par théorème d'encadrement, ~~avec~~ en posant

$\frac{m}{n} = (t)$

alors $\lim p_0(t) = \left(e^{-\lambda}\right)^t = e^{-\lambda t}$.

$$\boxed{\text{donc} \quad p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

10) $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$p_0(h) = e^{-\lambda h}$

$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$.

$\lim\limits_{h \to 0} -\lambda h = 0$.

$$\boxed{\text{donc} \quad p_0(h) \underset{0}{=} 1 - \lambda h + o(h)}$$

Numéro d'inscription 50 0 5 04

Né(e) le 13/12/2000

Nom IVARD

Prénom (s) MARVIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/09

b) $N_h(\Omega) \subset \mathbb{N}$ donc forcément

$([N_h=0], [N_h=1], [N_h\geq 2])$ est un système complet d'évènement

$p_1(h) = P(N_h=1)$

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h=k)$$

$$= P(N_h=0) + P(N_h=1) + P(N_h\geq 2)$$

Or $\lim_{h\to 0} P(N_h\geq 2) = 0$ car $N_0=0$.

$$\boxed{\text{donc } P(N_h=1) \underset{h\to 0}{=} 1-1+\lambda h+o(h) \underset{h\to 0}{=} \lambda h + o(h).}$$

c) $P(N_{t+h}=u) = \sum_{u=0}^{+\infty} P(((N_h=0)\cup(N_h=1)\cup(N_h\geq 2))\cap(N_{t+h}=u))$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d) $p_n(t+h) - p_n(t) \underset{h \to 0}{=} p_n(t)\left(p_0(h) - 1\right) + p_1(h) p_{n-1}(t) + o(h)$

On a $\dfrac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \underset{h \to 0}{=} \lambda\left(p_{n-1}(t) - p_n(t)\right) + o(1)$

$\boxed{\text{donc } p_n \text{ est dérivable et } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ p_n'(t) = \lambda\left(p_{n-1}(t) - p_n(t)\right) + o(1)}$

e) q_n est dérivable par produit

$q_n'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + p_n'(t) e^{\lambda t}$

$= \lambda q_n(t) + \lambda\left(p_{n-1}(t) - p_n(t)\right) e^{\lambda t}$

$= \lambda q_n(t) + \lambda q_{n-1}(t) - \lambda q_n(t)$

$= \lambda q_{n-1}(t)$

$\boxed{\text{donc } q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t)}$

f) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : « $q_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ »

pour $n=0$, $q_0(t) = e^{\lambda t} p_0(t) = 1$ car $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$\dfrac{(\lambda t)^0}{0!} = 1$ D'où H_0 vraie

- Soit $u \in \mathbb{N}$, tel que H_u soit vraie.

$$q_{u+1}(t) = e^{\lambda t} p_{u+1}(t)$$

$$q_{u+1}'(t) = \lambda q_u(t)$$

$$=$$