



A8-00049
561934

Maths S

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie A : Étude d'endomorphismes de polynômes

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(\lambda P + Q) &= 2(\lambda P + Q) + (X-a)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda 2P + 2Q + (X-a)(\lambda P' + Q') \quad \text{par dérivée de polynômes} \\ &= \lambda(2P + (X-a)P') + 2Q + (X-a)Q' \quad \text{par développement} \\ &= \lambda \Psi_\lambda(P) + \Psi_\lambda(Q)\end{aligned}$$

Donc Ψ_λ est une application linéaire

$$\deg \Psi_\lambda(P) \leq \max \{ \deg 2P, \deg (X-a)P' \}.$$

$$\text{Or } \deg 2P \leq n \quad (\text{car } P \in \mathbb{R}_n[X])$$

$$\text{et } \deg (X-a)P' \leq 1 + n - 1 = n$$

Donc $\deg \Psi_\lambda(P) \leq n$ donc $\Psi_\lambda(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

$\boxed{\Psi_\lambda \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

$$2) \Psi_\lambda(1) = 2 \times 1 + (X-a) \times 0 = 2$$

$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, n\}, \quad \Psi_\lambda(X^i) &= 2 \times X^i + (X-a) \cdot a X^{i-1} \\ &= 2X^i + aX^i - aX^{i-1} \\ &= (2+a)X^i - aX^{i-1}\end{aligned}$$

valable pour $i=0$.

Donc $\text{Mat}_{\mathbb{R}_n[X]} \Psi_\lambda =$

$$\begin{pmatrix} 2-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & x^n \end{pmatrix}$$

$\Psi_\lambda(1) \quad \Psi_\lambda(X^i) \quad \Psi_\lambda(X^n)$

3)a) La matrice de φ_a dans la base B de $(\mathbb{R}_n)_G$ est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale et elle a $n+1$ valeurs propres distinctes, or $\dim(\mathbb{R}_n)_G = n+1$.

donc φ_a est diagonalisable

$$\text{et } \text{sp}(\varphi_a) = \{ \text{Hil}(0, n) \}, 2+li$$

b) On n'est pas valeur propre de φ_a car φ_a est diagonalisable

donc φ_a est injective, or on n'est pas en dimension finie

donc φ_a est un automorphisme de $(\mathbb{R}_n)_G$

$$\begin{aligned} c) \text{ pour } li=0, \quad \varphi_a(Q_0) &= 2(X-a)^0 + (X-a) \times 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hil}(1, n), \quad \varphi_a(Q_{li}) &= 2(X-a)^li + (X-a)^li(X-a)^{li-1} \\ &= 2(X-a)^li + li(X-a)^li \\ &= (2+li)(X-a)^li \quad \text{valable pour } li=0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \text{Hil}(0, n), \quad \varphi_a(Q_{li}) = (2+li)(X-a)^li}$$

$$d) \text{ On a donc } \text{Hil}(0, n), \quad \varphi_a(Q_{li}) = (2+li)Q_{li}$$

or $Q_{li} \neq 0$ donc Q_{li} est vecteur propre de φ_a

les $(Q_{li})_{li \in \mathbb{N}}$ sont tous non nuls et rangés dans l'ordre strictement croissant des degrés donc c'est une famille libre.

$$\text{Or } \dim(Q_{li})_{li \in \mathbb{N}} = n+1 = \dim E_{(2+li)} \quad \text{donc une base}$$

$\boxed{\text{Donc } (Q_0, \dots, Q_n, \dots, Q_l) \text{ est une base de } \text{char}_{\mathbb{R}} \text{ des sous espaces propres de } \varphi_a}$

$$4(a) \quad \forall P \in \mathbb{R}_n(x), ((x-a)^2 P(x))' = 2(x-a)P(x) + P'(x)(x-a)^2 \\ = (x-a)\Psi_a(P)(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall P \in \mathbb{R}_n(x), ((x-a)^2 P(x))' = (x-a)\Psi_a(P)(x)}$$

b) Si $x \neq a$.

$$\begin{aligned} \Phi_a(\Psi_a(P))(x) &= \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)\Psi_a(P)(t) dt \\ &= \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a) \frac{((t-a)^2 P(t))'}{(t-a)} dt \quad (\text{car } x \neq a) \\ &\quad (\text{et d'après la}) \\ &= \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x ((t-a)^2 P(t))' dt \end{aligned}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(t) = 1 & u(t) = 0 \\ v(t) = ((t-a)^2 P(t))' & v(t) = (t-a)^2 P(t) \end{cases}$$

On retrouve l'identité (1) sur $[a, \infty)$.

Pour JPP,

$$\begin{aligned} \Phi_a(\Psi_a(P))(x) &= \frac{1}{(x-a)^2} \left([((t-a)^2 P(t))]_a^x \right) \\ &= \frac{1}{(x-a)^2} ((x-a)^2 P(x)) = P(x). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \Phi_a(\Psi_a(P))(n) = P(n)$$

Si $x=a$,

$$\Phi_a(\Psi_a(P))(n) = \frac{\Psi_a(P)(a)}{2} = \frac{2P(n)}{2} = P(n).$$

$$\text{Finalement } \forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n(x), \Phi_a(\Psi_a(P))(n) = P(n)$$

infinité de racines donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n(x), \Phi_a(\Psi_a(P)) = P$$

c) On a donc pour l'identité

$$\Phi_a(\Psi_a(\text{Id}_E)) = \text{Id}_E$$

Donc $\Phi_a : P \rightarrow \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n(x)$
et sa réciproque est Ψ_a donc $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$

$$4) d) \text{ On admet } \Phi_a = \Psi_a^{-1}$$

Or Ψ_a est diagonalisable et $\text{sp}(\Psi_a) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \lambda \in \text{sp}(\Psi_a)\}$

Or $2+hu \neq 0$ donc les valeurs propres de Ψ_a^{-1} sont donc Ψ_a^{-1} diagonalisable $\text{sp}(\Psi_a^{-1}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \frac{1}{2+hu}\}$

$$\text{Or } \text{Mat}_{\Psi_a^{-1}} \times \text{Mat}_{\Psi_a} = \text{Id}_E$$

Donc Φ_a a n valeurs propres toutes distinctes donc Φ_a est diagonalisable car $\dim M_n(\mathbb{C}) = n^2$.
Il donc $\text{sp}(\Phi_a) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \frac{1}{2+hu}\}$

Partie B: Etude d'une fonction définie par une intégrale

Si a) $t \mapsto t f(t)$ est continue sur \mathbb{R} par produit donc $t \mapsto t f(t)$ existe.

De plus h est l'unique primitive de $t \mapsto t f(t)$ n'annulant pas

0 donc h est de classe C sur \mathbb{R} .

De plus $H \in \mathbb{R}$, $h'(n) = n f(n)$

b) f est une fonction définie et continue sur \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R} donc f est bornée et atteint ses bornes sur le segment $(0, n)$
Donc pour tout i , $\exists (a_i, b_i) \in (0, n)^2$,
 $A \in (0, n)$ $f(a_i) \leq f(t) \leq f(b_i)$
on multiplie par t et $t \in (0, n)$ est réel donc on a
 $f(a_i)t \leq t f(t) dt \leq f(b_i)t$

On intègre sur t de 0 à x qui sont des bornes croissantes pour t :

$$\text{Donc } \int_0^x f(a_i) t dt \leq \int_0^x t f(t) dt \leq \int_0^x f(b_i) t dt$$

Donc

$$f(a_i) \int_0^x t dt \leq \int_0^x t f(t) dt \leq f(b_i) \int_0^x t dt$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques Semlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

S1 c) On admet $f(x) \geq 0$

$$f(d_n) \left[\frac{t^2}{2} \right]_{d_n}^x \leq h(x) \leq f(B_n) \left[\frac{t^2}{2} \right]_{B_n}^x$$

$$\text{i.e. } \frac{f(d_n)t^2}{2} \leq h(x) \leq \frac{f(B_n)t^2}{2}$$

et on divise donc pour $t^2 > 0$

$$\text{On a } \frac{f(d_n)}{2} \leq \frac{h(x)}{t^2} \leq \frac{f(B_n)}{2}$$

$$\text{Or } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ d_n \geq 0}} \frac{f(d_n)}{2} = \frac{f(0)}{2} \quad \text{car } d_n \text{ va appartenir à } (0, \lim_{x \rightarrow 0} d_n) = (0, 0).$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ B_n \leq 0}} \frac{f(B_n)}{2} = \frac{f(0)}{2} \quad \text{pour les mêmes raisons}$$

et par continuité de f sur \mathbb{R}
donc en 0

par le théorème d'enveloppement

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \geq 0}} \frac{h(x) - f(0)}{t^2} = \frac{f'(0)}{2}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a deux de même deux réels d_n et B_n appartenant à $(x, 0)$.

tels que $f(d_n) \leq f(t) \leq f(B_n)$

$$\forall t \in (x, 0), \exists d_n \text{ dan } t f(d_n) \geq t f(t) \geq t f(B_n)$$

On intègre sur des bornes croissantes

$$\text{donc } \int_x^0 f(d_n) dt \geq \int_x^0 f(t) dt \geq \int_x^0 f(B_n) dt$$

donc $\frac{f(x_n) - x^2}{2} \geq -h(n) \geq -\frac{f(B_n) - x^2}{2}$

on divise par $-x^2 < 0$

Donc $\frac{f(x_n)}{2} \leq \frac{h(n)}{x^2} \leq \frac{f(B_n)}{2}$

Donc de même par théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{h(n)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$$

6) Si $n=0$, $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt - \frac{h(n)}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}^*

(car $x \mapsto h(n)$ est continue sur \mathbb{R})

et $x \mapsto x^2$ aussi et $x^2 + 0$ sur \mathbb{R}^*

Si $n=0$ $f(0)$ est continue sur \mathbb{R}

Or on montre que $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{h(n)}{x^2} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{h(n)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

Donc $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{h(n)}{x^2} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\Phi(f)(n)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

Donc $\Phi(f)$ est continue sur \mathbb{R}

$x \mapsto \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt - \frac{1}{x^2} h(n)$ est continue de domé
(car \mathbb{R}^* est un \mathbb{R}^* par produit
de fonctions de domé)

Donc Φ

De plus on sait, $(\Phi(f))'(n) = \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt \right)'$

$$= -\frac{2x}{x^4} \int_0^x t f(t) dt + x f(n) + \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^3} \times 2 \int_0^x t f(t) dt + f(x) \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2} (f(x) - 2 \int_0^x t f(t) dt) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 2 \bar{f}(f)(x)).$$

Donc $\bar{f}(f)$ est continue sur \mathbb{R} et de classe C' sur \mathbb{R}^* et sur \mathbb{R}^{\pm}

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}^*, (\bar{f}(f))'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - 2 \bar{f}(f)(x))$$

7(a) Si f est paire ou impaire, si $x=0$ cela ne change rien

$$\text{car } \frac{f(-0)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. alors $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Soit f paire

$$\text{alors } \bar{f}(f)(-x) = \frac{1}{(-x)^2} \int_0^{-x} t f(t) dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x (-t) f(t) dt$$

On pose le changement de variable affine.

$u = -t$ de classe C' sur $[0, -x]$.

$$\frac{du}{dt} = -1 \Rightarrow dt = -du$$

quand $t=0$ alors $u=0$

quand $t=-x$ alors $u=x$

$$\text{Donc } \bar{f}(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x (-u) f(-u) (-du)$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(-u) du \quad \text{et } f \text{ paire}$$

donc $f(-u) = f(u)$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) du = \bar{f}(f)(x)$$

Donc si f est paire alors $\bar{f}(f)$ est paire

- Soit f impaire

$$\text{alors } \bar{f}(f)(-x) = \frac{1}{(-x)^2} \int_0^{-x} (-t) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x (-t) f(t) dt$$

On note le changement de variable affine déclaré sur $[0, \pi]$

$$u = -t$$

On a donc de même

$$\Phi(f)(-u) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi u f(-u) du$$

$$\Phi(f)(-u) = -\Phi(f)(u)$$

(car f impaire)

$$= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi u f(u) du$$

$$= -\Phi(f)(u)$$

Donc $\Phi(f)$ impaire

Ainsi, si n est paire (respectivement impaire), alors

$\Phi(f)$ est paire (respectivement impaire)

b) Si $n=0$, $\frac{f(0)}{\pi} > 0$ (car f est positive donc $\Phi(f)(0)$ positive)

$\sin t > 0, \forall t \in [0, \pi], f(t) > 0$

Donc $t f(t) > 0$ (car f positive)

par conséquence de l'intégrale sur des bornes croissantes

positivité

$$\int_0^\pi t f(t) dt > 0$$

De plus $\frac{1}{\pi^2} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(f)(n) > 0$

$\sin t < 0, \forall t \in [0, \pi], f(t) < 0$

Donc $t f(t) < 0$ (car f est positive)

Donc $-t f(t) > 0$.

On intègre sur t de π à 0 bornes croissantes

$$\text{on a } - \int_\pi^0 t f(t) dt > 0.$$

Donc $\int_0^\pi t f(t) dt > 0$.

On multiplie par $\frac{1}{\pi^2} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Phi(f)(n) > 0$

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques 5 em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

finalemement si f est une fonction positive alors
 $\Phi(f)$ est encore une fonction positive

8) a) si $\lim_{n \rightarrow \infty} f = l$ alors par somme $\lim_{n \rightarrow \infty} g = 0$.

Donc d'après les hypothèses
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(g)) = 0$.

$$\text{or } \Phi(g)(n) = -\Phi(f(n)) + \Phi(f-l)(n)$$

$$= \Phi(f(n)) - \Phi(l)(n) \text{ par linéarité}$$

$$\text{or } \Phi(l)(n) = \frac{l}{2} \text{ si } n=0$$

$$\text{sinon, } \Phi(l)(n) = \frac{1}{n^2} \int_0^n t l dt = \frac{l}{n^2} \times \frac{n^2}{2} - \frac{l}{2}$$

$$\text{Donc } \Phi(g(n)) = \Phi(f(n)) - \frac{l}{2}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(g(n)) = 0 \text{ donc par linéarité } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f) = \frac{l}{2}$$

Ainsi si $\lim_{n \rightarrow \infty} f = l$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(f)) = \frac{l}{2}$

$$b) \text{ si } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l$$

$$\text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\bar{\Phi}(f)(-x)) = \frac{l}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\bar{\Phi}(f)(x)) = \frac{l}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ainsi si } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\bar{\Phi}(f)(x)) = \frac{l}{2} \end{array} \right|$$

Partie C : une application en probabilité

g) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, n], 0 \leq F(t) \leq F(n)$ (car une fonction de répartition est croissante)

donc $0 \leq tF(t) \leq tF(n)$

on intègre sur t de 0 à n si qui sont entre 0 et n une borne croissante

$$\text{Donc } 0 \leq \int_0^n tF(t) dt \leq F(n) \int_0^n t dt = \frac{n^2}{2}$$

On multiplie par $\frac{2}{n^2} > 0$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{2}{n^2} \int_0^n tF(t) dt \leq \frac{2}{n^2} F(n)$$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq G(n) \leq F(n)}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n, \infty), 0 \leq F(n) \leq F(t)$

$t \geq n$ donc $0 \leq tF(n) \geq tF(t)$

on intègre sur t de n à ∞ une borne croissante

$$\text{Donc } 0 \leq \int_n^\infty tF(n) dt \geq \int_n^\infty tF(t) dt$$

$$\text{Donc } 0 \leq F(n) - \frac{n^2}{2} \geq - \int_n^\infty tF(t) dt$$

on multiplie par $\frac{2}{x^2} < 0$

Donc $G \in F(\mathbb{R}) \setminus G(\mathbb{R})$

Ainsi $H(x) = G(x)$, $G \in F(\mathbb{R}) \setminus G(\mathbb{R})$

soit $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\int_0^x t^2 f(t) dt$ est l'unique primitive de $t^2 f(t)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui s'annule en 0 donc de classe C sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car $t^2 f(t)$ est continue par produit, une fonction de répartition est continue sur \mathbb{R}

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\int_0^x t^2 f(t) dt$ est de classe C sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par produit

De plus $H'(x) = G'(x) = \left(\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 f(t) dt \right)'$

$$= -\frac{2 \times 2x}{x^4} \int_0^x t^2 f(t) dt + x f(x) \frac{2}{x^2}$$

$$= -\frac{4}{x^3} \int_0^x t^2 f(t) dt + F(x) \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2}{x} (F(x) - \frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 f(t) dt)$$

$$= \frac{2}{x} (F(x) - G(x))$$

Ainsi G est de classe C sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

et $f \in F(\mathbb{R})$, $G'(x) = \frac{2}{x} (F(x) - G(x))$

11) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $G'(x) = \frac{2}{x} (F(x) - G(x))$ par somme et produit
elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Donc g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $x > 0$, $\frac{2}{x} (F(x) - G(x)) > 0$ d'après g

Si $x < 0$, $\frac{2}{x} (F(x) - G(x)) > 0$ car $F(x) - G(x) < 0$ et $g < 0$

Et $\frac{2}{x} < 0$ donc par produit c'est positif.

De ce fait g est positive sur \mathbb{R} et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} g(m) dm = 1$
montrera que

Soit $\varepsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(m) dm = \int_{-\infty}^{+\infty} G'(m) dm = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} (F(m) - G(m)) dm$

Soit $\beta > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} (F(m) - G(m)) dm$

Sauf b démonté
de f

On pose $\begin{cases} u(x) = F(x) - G(x) \\ u'(x) = \frac{2}{\pi} \end{cases}$ $\begin{aligned} u'(x) &= f(x) - G'(x) \\ &= f(x) - \frac{2}{\pi} (F(x) - G(x)) \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - F(x)) \end{aligned}$

On donc pour IFF u n'a pas de borne ($\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} (F(m) - G(m)) dm = [2 \ln(m) (F(m) - G(m))]_{-\infty}^{\beta} +$$

On montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(m) dm = 1$

De plus g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et positive sur \mathbb{R}

Donc g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire U .

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^u g(m) dm$$

$$\text{Si } u=0, F_U(0) = \int_{-\infty}^0 g(m) dm = \int_{-\infty}^0 G'(m) dm$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} G'(m) dm = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} G(m) dm = G(0) - G(\varepsilon)$

Or $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon) = 0$ par croissance comparée

$$\text{Si } u \neq 0, F_U(u) = \int_{-\infty}^u g(m) dm$$

On a de même par limite $F_U(u) = G(u)$

Donc G est la fonction de répartition de U

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques Semlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12(a) $n \mapsto 2ne^{-n^2}$ est continue sur \mathbb{N} par morceaux et
composée

donc h_n est continue sur \mathbb{N}

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2ne^{-n^2} \geq 0$$

donc h_n est positive sur \mathbb{N} (ou 0 est aussi positif mind).

Nous savons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t) dt = 1$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt$ converge absolument vers 0

$$\text{Car } n > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} dt = [-e^{-t^2}]_0^{+\infty}$$

$$= 1 - e^{-n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n^2} = 0)$$

Donc h_n est continue sur \mathbb{N} , positive sur \mathbb{N}
et $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt = 1$ par la relation de Charles

Donc h_n est une densité de probabilité

b) X_1 admet une espérance car $\int_{-\infty}^{+\infty} t h_1(t) dt$ converge absolument

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} t h_1(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt$

$$\text{Car } \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

Soir $X \sim U(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}})$

alors X à pondérité, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Or $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ entre

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } \mathbb{E}(X^2) &= V(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'après la formule de Koenig-Knopp

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on reconnaît l'espérance de X ,

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{d'après Charles}$$

c) Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(f^n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Si $n \leq 0$, $H_n(f) = 0$.

$$\text{Si } n \geq 0, \quad H_n(f) = \left(\int_0^{+\infty} h_n(t) dt \right) = \left(\int_0^{+\infty} h_n(t) dt \right)$$

$$= \left[-e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = 1 - e^{-\infty^2}$$

$$\text{Donc } H_n(f) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 - e^{-\infty^2} & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \Phi(H_1)(x) = \begin{cases} H_1(0) & \text{si } x=0 \text{ et } H_1(0)=0 \text{ donc } 0 \text{ si } x=0 \\ \frac{1}{\pi^2} \int_0^x t H_1(t) dt & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{x^2}{2} + (1 - e^{-t^2}) \right] dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\pi^2} \int_0^x \left(\frac{x^2}{2} + (1 - e^{-t^2}) \right) dt = \frac{1}{\pi^2} \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x + \left[x - e^{-t^2} \right]_0^x \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{x^2}{2} + \left[\frac{x - e^{-x^2}}{2} \right]_0^x \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x - e^{-x^2} - 1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{x - e^{-x^2} - 1}{2\pi^2}$$

$$\text{Donc } H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \frac{x - e^{-x^2} - 1}{2\pi^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1 - e^{-x^2}}{\pi^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

on dérive la deuxième partie

$$h_2'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ - \frac{(1 - e^{-x^2})^2 x^2 - 2x(1 - e^{-x^2})}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ - \frac{2x^3 - 2x(1 - e^{-x^2})}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ - \frac{2}{x} - \frac{2(1 - e^{-x^2})}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

x_2 admet une asymptote en $\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) dt$ converge

absolument

($\int_0^\infty h_2(t) dt$ converge absolument stricte)

$$\int_0^{+\infty} t h_2(t) dt = \int_0^{+\infty} -\frac{2(1-e^{-t^2})}{t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -\frac{2t^3 - 2t(1-e^{-t^2})}{t^3} dt$$

or $t \mapsto -\frac{2t^3 - 2t(1-e^{-t^2})}{t^3}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{et } 1-e^{-t^2} = \frac{-t^2}{t^2}$$

$$\text{Donc } -\frac{2t^3 - 2t(1-e^{-t^2})}{t^3} = o(1)$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2t^3 - 2t(1-e^{-t^2})}{t^3} = 0$$

Donc intégrale finement imprégnée en 0.

~~De plus $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad 2t^3 - 2t(1-e^{-t^2}) > 0$~~

~~Donc~~

Partie 2) Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (|x|+|y|)^2 \geq 0$.

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq |x||y| \geq |\ln x||\ln y|$ d'après l'inégalité triangulaire

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\ln x| + \frac{1}{2}(|x|^2 + y^2) \geq 0$

b) on donne $\forall x \in \mathbb{R}, \exists f(x) g(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}((f(x))^2 + (g(x))^2)$

or par linéarité, l'intégrale de droite converge au sens intégré
 $(f_i, g_i) \in E_2^2$

Donc par comparaison des fonctions positives

$\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)| dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques Semlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14) Soit $f \in \mathcal{E}_2$ ($\int_0^{\infty} (f(x))^2 dx$ converge alors)

f est une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$ et admet des dérivées continues sur $[0, +\infty[$.

* $g \in \mathcal{E}_2$ en effet g est une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$ et admet des dérivées continues sur $[0, +\infty[$

Donc $\mathcal{E}_2 + g$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f) \in \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2$

alors $\int_0^{\infty} (\lambda f + g)^2 dx$

$= \int_0^{\infty} \lambda^2 f^2(x) dx$

$$\text{Soit } \lambda > 0, \int_0^{\infty} (\lambda f + g)^2 dx = \int_0^{\infty} \lambda^2 f^2(x) + g^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) dx$$

Quand $x \rightarrow \infty$ tout converge par combinaison linéaire
 et $\int_0^{\infty} \lambda f(x)g(x) dx$ converge car absolument convergente
 implique la convergence simple

Finallement \mathcal{E}_2 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F}

15) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité de produit de réels

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale convergente

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx > 0$ par positivité de l'intégrale définie

$$\langle f, f \rangle = 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} f^2(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f^2(n) = 0$$

car tout est positif et f est continue

$$\Rightarrow f(n) = 0$$

$\Rightarrow f = 0$ par continuité et f définie sur \mathbb{R}_+

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}_+

16) a) On a montré que $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{h(n)}{n^2} = \frac{f(0)}{2}$

par continuité de $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(h(n))^2}{n^4} = \frac{f^2(0)}{4}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(h(n))^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f^2(0)}{4} = 0$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(h(n))^2}{n^4} = \frac{(f(0))^2}{4}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(h(n))^2}{n^3} = 0$$

$$b) \forall x > 0, \int_0^x \frac{(h(n))^2}{x^4} dm$$

or $0 < x$

$$\text{Suppose } \begin{cases} u(n) = (h(n))^2 \\ v(n) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u'(n) &= 2h'(n)h(n) \\ &= 2x f'(x)h(x) \\ v(n) &= -\frac{1}{3x^3} \end{aligned}$$

Même méthode que le cas (a, c)

par IPP,

$$\int_{\varepsilon}^x \frac{(h(n))^2}{x^4} dm = \left[-\frac{(h(n))^2}{3x^3} \right]_{\varepsilon}^x + \frac{2}{3} \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{x^2} f'(n) h(n) dm$$

$$= -\frac{(h(\varepsilon))^2}{3\varepsilon^3} + \frac{(h(x))^2}{3x^3} + \frac{2}{3} \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{x^2} f'(n) h(n) dm \quad \text{or } \forall x > 0, \frac{1}{x^2} h(n) = \mathbb{E}(f'(n))$$

$$\text{or } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(h(\varepsilon))^2}{3\varepsilon^3} = 0 \text{ d'après 16(a)}$$

Donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^x \frac{(h(n))^2}{x^4} dm = -\frac{1}{3} \frac{(h(x))^2}{x^3} + \frac{2}{3} \int_0^x f'(n) \mathbb{E}(f'(n)) dm$$

$$c) \int_0^x (x f(n) + \mathbb{E}(f'(n))^2) dm \geq 0 \text{ par positivité de l'intégrale}$$

Donc $\lambda^2 \int_0^x f(n) dm + 2\lambda \int_0^x f(n) \mathbb{E}(f'(n)) dm + \int_0^x \mathbb{E}^2(f'(n)) dm \geq 0$
 par linéarité
 intégrale
 convergente

Nous avons une fonction polynomiale en λ , toujours positive donc son discriminant est toujours négatif ou nul.

Donc

$$(2 \int_0^x f(n) \mathbb{E}(f'(n)) dm)^2 - 4\lambda \left(\int_0^x f(n) dm \right) \left(\int_0^x \mathbb{E}^2(f'(n)) dm \right) \leq 0$$

$$\text{Donc } \left(\int_0^x f(n) \mathbb{E}(f'(n)) dm \right)^2 \leq \left(\int_0^x f(n) dm \right) \left(\int_0^x \mathbb{E}^2(f'(n)) dm \right)$$

tant est positif et par stricte croissance de $n \mapsto \mathbb{E}(f'(n))$ sur \mathbb{N}

$$\text{Donc } \int_0^x f(n) \mathbb{E}(f'(n)) dm \leq \left(\int_0^x (f(n))^2 dm \right)^{1/2} \left(\int_0^x (\mathbb{E}(f'(n))^2 dm) \right)^{1/2}$$

$$d) \text{ Or on a } \frac{2}{3} \int_0^x f(n) \mathbb{E}(f)(n) dm = \int_0^x \left(\frac{(h(n))^2}{n^4} + \frac{1}{3} \frac{(h(x))^2}{x^3} \right)$$

$$\text{Donc } \int_0^x \left(\frac{(h(n))^2}{n^4} + \frac{1}{3} \frac{(h(x))^2}{x^3} \right) \leq \frac{2}{3} \left(\left(\int_0^x (f(n))^2 dm \right)^{1/2} \left(\int_0^x \mathbb{E}(f(n))^2 dm \right)^{1/2} \right)$$

$$e) \mathbb{E}(f) \in E_2 \text{ et } \int_0^{+\infty} (\mathbb{E}(f(n))^2 dm) \text{ converge}$$

$$\text{Or } \forall x > 0, \left(\left(\int_0^x (\mathbb{E}(f)(n))^2 dm \right)^{1/2} \right)^2 \leq \frac{2}{3} \left(\left(\int_0^x (f(n))^2 dm \right)^{1/2} \right)^2 \\ \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^{+\infty} (f(n))^2 dm \right)^{1/2}$$

On trouve un nombre positif tel que $f \in E_2$.

$$\text{Donc par comparaison } \left(\int_0^x \mathbb{E}(f)(n)^2 dm \right)^{1/2} \text{ converge.}$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(f(n)) dm \text{ converge}$$

$$\|\mathbb{E}(f)\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathbb{E}(f(n))^2 dm} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^{+\infty} (f(n))^2 dm \right)^{1/2} = \frac{2}{3} \|f\|.$$

Ainsi $\mathbb{E}(f)$ appartient à E_2 et $\|\mathbb{E}(f)\| \leq \frac{2}{3} \|f\|$

$$f) \text{ On a } \forall x > 0, \frac{2}{3} \int_0^x f(n) \mathbb{E}(f)(n) dm = \int_0^x \left(\frac{(h(n))^2}{n^4} dm + \frac{1}{3} \frac{(h(x))^2}{x^3} \right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \frac{(h(x))^2}{x^3} = 0 \text{ car } h \text{ est bornée}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(h(n))^2}{n^4} dm = l \quad \text{(on limite finie)}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \int_0^x f(n) \mathbb{E}(f)(n) dm = l$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques Semlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

g) On en déduit donc que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\int_0^x (\sqrt{f(p)} \cdot u(p))^{1/2} dp \right)^{1/2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{3} \int_0^x f(p) u(p) dp$$

donc que $(\sqrt{f(p)})^{1/2} = \frac{2}{3} f(p)$

Partie F Etude d'une suite

A71 function s= suite(u,n)

for h=1:n

s=s+h*u(h)

end

s=(1/(m*(m+1)))*s

endfunction

display(s)

18) a)

$\{u_n\}$ est une suite réelle positive
donc $\{u_n\}$ croissante et minorée par 0 donc
converge

b) On peut conjecturer à l'aide des graphiques
suivants que $\{u_n\}$ décroissante, qu'elle converge
vers une limite de u_0 inférieure ou égal à celle
de $\{v_n\}$

$$v_n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^m \ln u_k$$

$$= \cancel{\frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^m \ln u_k \right)}$$

$$\text{Si } n=1, v_1 = \frac{1}{2} u_1 \quad \text{Donc } v_1 \geq \frac{u_1}{2}$$

Soit $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \ln u_k = \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln u_k + n u_n \right)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \ln u_k + \frac{u_n}{n+1}$$

$\Rightarrow \{v_n\}$ est une suite de réels positifs

$$\Rightarrow \frac{v_n}{n+1} \geq \frac{v_n}{2} \quad \text{car } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \geq 0$$

donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\{v_n\}$ est

$$\text{Hinweis: } U_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{j=1}^{2n} j \cdot U_j$$

$$\text{für } n=1, \quad U_2 = \frac{1}{2 \times 3} \Delta \times U_1 = \frac{U_1}{6}$$

$$\text{Wk } \frac{2}{2 \times 3} U_1 + \frac{4}{4 \times 3} U_2 = \frac{U_1}{3} + \frac{1}{3} U_2 = \frac{U_1 + U_2}{3} > \frac{U_1 + U_2}{6}$$

$$\text{für } U_n, \frac{U_n}{2}$$

Dann für $n=1$ Lst es zu

$$\text{Hinweis: } U_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{j=1}^{2n} j \cdot U_j = \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum_{j=1}^n j \cdot U_j + \sum_{j=n+1}^{2n} j \cdot U_j \right)$$

$$d) (n+2) U_{n+2} = \frac{n+2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \cdot U_j = \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^n j \cdot U_j + (n+1) U_{n+1} \right)$$

$$= (n+2) U_n + \frac{n+2}{n} U_{n+1}$$

$$= n U_n + 2 U_n + U_{n+1} + \frac{2}{n} U_{n+1}$$

$$= \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{n+1} j \cdot U_j = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} j \cdot U_j + (n+1) U_{n+1} \right)$$

$$= n U_n + U_{n+1}$$

Dann Hinweis: $(n+2) U_{n+2} = n U_n + U_{n+1}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{n+1} j \cdot U_j - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \cdot U_j$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^n j \cdot U_j + \frac{U_{n+1}}{n+2} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \cdot U_j$$

$$= \sum_{j=1}^n j \cdot U_j \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{U_{n+1}}{n+2}$$

$$= \sum_{j=1}^n j \cdot U_j \left(\frac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)} \right) + \frac{U_{n+1}}{n+2}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^n j \cdot U_j + \frac{U_{n+1}}{n+2} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \left(\sum_{j=1}^{n+1} j \cdot U_j - (n+1) U_{n+1} \right) + \frac{U_{n+1}}{n+2}$$

$$= \frac{1}{n} (U_{n+1} - 2U_n).$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+2)U_{n+1} = nU_n + U_{n+1}$

$$\text{Or } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n} (U_{n+1} - 2U_n)$$

a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \frac{U_1}{2}$ et $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n} (U_{n+1} - 2U_n)$.

Donc (U_n) converge alors

$$\text{Or } U_{n+1} > \frac{U_1}{2} \text{ donc } 2U_{n+1} > U_1$$

Donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$ (U_n est décroissante)

$U_1 > 0$ (U_n est décroissante et minorée par 0)
donc (U_n) converge

$$\begin{aligned} \text{Soit } V_N \in \mathbb{R}^*, \sum_{n=1}^N U_n &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \Delta U_k \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \Delta U_k \\ &= \cancel{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{n(n+1)} \Delta U_k = \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \Delta U_k \\ &= \sum_{k=1}^N \Delta U_k \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \quad \text{Car } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \\ &= \sum_{k=1}^N \Delta U_k - \sum_{k=1}^N \frac{1}{N+1} \Delta U_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^N U_n = \sum_{k=1}^N \Delta U_k - \frac{N}{N+1} \Delta U_N}$$

vers le bas?

b) Or ~~$\Delta U_N = \frac{N \Delta U_N}{2}$~~ ,

~~$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta U_N = 0$~~ (car $\sum U_n$ converge)

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Maths ENL

- Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
 - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
 - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
 - Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
 - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^N u_n \text{ converge}$$

b) Tous sont positifs

$$\text{Or } \sum_{n=1}^N u_n < \sum_{n=1}^N v_n$$

$\text{Or } \sum_{n=1}^N u_n$ converge donc $\sum_{n=1}^N v_n$ converge

c) par convergence

$$\text{Or } \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

d)

limite nulle

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

$$201a) \quad P(Z=n) > 0$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot P(Y=i)$$

On a modifié

$$\text{que } \sum_{n=1}^{\infty} P(Z=n) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(Y=i) = 1$$

Car Y variable aléatoire

Donc $P(Z=n)$ existe

$$P(Z=n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot P(Y=i)$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(Y=i) = E(Y)$$

$$\text{et } \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Donc $P(Z=n) \sim \frac{E(Y)}{n^2}$

/

/