1) Θ (theta) est un réel, $\Theta > 0$

$\forall n \geq 2$

$\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \frac{1}{1+\Theta}\left(\frac{\Theta}{1+\Theta}\right)^k$

- l'énoncé nous assure que $\Theta > 0$. De plus on a bien $1+\Theta > 0$.
  Ainsi, les termes de la suite (u_k) sont bien définis et positifs.

- Vérifions à présent que la série $\sum u_k$ converge et que sa somme vaut 1.

Or la suite (u_k) est une suite géométrique de raison $\frac{\Theta}{1+\Theta}$ tel que $0 < \frac{\Theta}{1+\Theta} < 1$ (car $0 < \Theta + 1 < 1$). De ce fait, la série $\sum u_k$ converge.

On a donc : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\Theta}\left(\frac{\Theta}{1+\Theta}\right)^k$

$$= \frac{1}{1+\Theta} \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\Theta}{1+\Theta}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1+\Theta} \times \frac{1}{1-\frac{\Theta}{1+\Theta}}$$

$$= \frac{1}{1+\Theta} \times \frac{1}{\frac{1}{1+\Theta}}$$

$$= 1$$

Donc la suite (u_k) définit une loi de probabilité.

2)a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = u_k$ et $X(\Omega) = \mathbb{N}$

On pose $Y = X+1$. Donc $X = Y-1$. avec $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$P(Y=k) = P(X+1=k)$$
$$= P(X=k-1)$$
$$= u_{k-1}$$
$$= \frac{1}{1+\Theta}\left(\frac{\Theta}{1+\Theta}\right)^{k-1}$$

On remarque que $Y \hookrightarrow G\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$

D'où $E(Y) = 1+\theta$ et $V(Y) = \dfrac{1-\frac{1}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \dfrac{\theta}{1+\theta} \times (1+\theta)^2 = \theta(1+\theta)$

b) Scilab :

```
theta = disp ('entrez la valeur de theta')
Y     = grand (1, 1, 'geom', 1/(1+theta))

X = Y - 1
disp(X)
```

3) $\forall \theta \in \mathbb{R}^*_+,\ L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$

Comme les variables X_k suivent la même loi que X on a :

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X = x_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) \quad \text{d'après l'énoncé.}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}$$

Etant donné que $\forall \theta \in \mathbb{R}^*_+ \ L(\theta) > 0$; on peut utiliser la fonction logarithme népérien :

$$\ln(L(\theta)) = \ln\left(\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)$$

$$= n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + \sum_{k=1}^{n} x_k \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \quad \text{(propriété de la fonction logarithme)}$$

$$= n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + S_n \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \quad \left(\text{car } S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ selon l'énoncé}\right)$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^*_+, \quad \underline{\ln(L(\theta))} = n\ln(1) - n\ln(1+\theta) + Sn(\ln(\theta) - \ln(1+\theta))$$

$$= \underline{Sn\ln(\theta) - (Sn+n)\ln(1+\theta)}$$

On simplifie de cette manière car c'est ce qui nous est demandé ensuite.

Question dure

b) Soit $\forall \theta \in \mathbb{R}^+_*, \ f(\theta) = Sn\ln(\theta) - (Sn+n)\ln(1+\theta)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ par opération de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+_*$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+_*, \quad \underline{f'(\theta)} = \frac{Sn}{\theta} - \frac{Sn+n}{1+\theta}$$

$$= \frac{Sn(1+\theta) - \theta(Sn+n)}{\theta(1+\theta)}$$

$$= \underline{\frac{Sn - \theta n}{\theta(1+\theta)}}$$

Or $\theta > 0$ donc $\theta(1+\theta) > 0$. Le signe de $f'(\theta)$ dépend de $Sn - \theta n$.

Ainsi $f'(\theta) \geq 0 \iff Sn - \theta n \geq 0$.

$$\iff Sn \geq \theta n.$$

$$\iff \frac{Sn}{n} \geq \theta.$$

De ce fait f est croissante sur $]-\infty; \frac{Sn}{n}]$.

et f est décroissante sur $[\frac{Sn}{n}; +\infty[$.

On en déduit que f admet un maximum $\hat{\theta}$ tel que $\underline{\hat{\theta} = \frac{Sn}{n}}$

c) On pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

- T_n est un estimateur de θ car T_n est fonction d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ ayant la même loi que X et T_n est indépendant de θ.

- En notant $b(T_n)$ le biais de T_n. On dit que T_n est un estimateur sans biais de θ lors que $E(T_n) = \theta$ (car $b(T_n) = E(T_n) - \theta$)

$E(T_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta$ Car les $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ suivent la même loi que X.

$= \frac{\theta}{n} \times n$

$= \theta$

Ainsi : T_n est bien un estimateur sans biais de θ

d) Le risque quadratique, $r_\theta(T_n)$, de T_n est égale à sa variance car T_n est un estimateur sans biais de θ.

Calculons $V(T_n)$, la variance de T_n.

$V(T_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ par indépendance des variables (et par transformation affine)

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \theta(1+\theta)$

$= \frac{\theta(1+\theta)}{n^2} \times n$

$= \frac{\theta(1+\theta)}{n}$.

Donc $r_\theta(T_n) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}$

Par passage à la limite, on en déduit $\lim_{n \to +\infty} r_\theta(T_n) = 0$