1)a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$\underline{sp(A) = \{0; 1\}}$

b) Etant donné que A admet deux valeurs propres distinctes, il suffit d'avoir deux vecteurs propres pour avoir une base.

D'où, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $(1, 0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Par conséquent $((1,0) ; (1,1))$ est une base de vecteurs propres.

D'après le théorème de diagonalisation, il existe une matrice D diagonale et P inversible tel que :

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ avec $\underline{A = PDP^{-1}}$.

2)a) $E = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, AM = MD \}$

- On sait que $E \in M_2(\mathbb{R})$ et que $M \in M_2(\mathbb{R})$, alors $\underline{E \subset M_2(\mathbb{R})}$
- $\underline{0 \in E}$ car $A0 = 0D = 0$.
- Soient $(M, N) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} A(aM + bN) &= aAM + bAN \\ &= aMD + bND \\ &= (aM + bN)D \end{aligned}$$

Alors on a $(aM + bN) \in E$; <u>donc E est stable par combinaison linéaire</u>

<u>Donc E est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$</u>

b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. $M \in M_2(\mathbb{R})$.

$AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}$

$MD = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$M \in E \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ y = t \\ t = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = t \end{cases}$.

Donc $M \in E$ si et seulement si $z = 0$ et $y = t$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ z = 0 \text{ et } y = t \}$ où $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$E = \{ \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} \ / \ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \}$

$E = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

$E = \mathrm{Vect}(U, A)$

la famille (U, A) est donc génératrice de E et est libre.

Donc (U, A) est une base de E

d) Calculons le produit UA.

$UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(on n'a pas $y = t$, condition nécessaire car $0 \neq 1$)

Donc UA n'est pas un élément de E.

3) $M \in M_2(\mathbb{R})$, $f(M) = AM - MD$

a) Soient $(M, N) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{f(aM + bN)} = A(aM + bN) - (aM + bN)D$$
$$= aAM + bAN - aMD + bND$$
$$= a(AM - MD) + b(AN - ND)$$
$$= \underline{a f(M) - b f(N)}$$

<u>f est donc linéaire</u>

b) Déterminons le noyau de f :

$\underline{M \in \ker(f)} \Leftrightarrow AM - MD = 0$
$\Leftrightarrow \underline{M \in E}$

Donc $\underline{\ker(f) = E}$ De ce qui précède $\underline{\dim[\ker(f)] = 2}$
(car (I, A) est une base de E)

c) D'après le théorème du rang on a :

$$\underline{\dim[\mathrm{Im}(f)]} = 4 - \dim[\ker(f)]$$
$$= 4 - 2$$
$$= \underline{2}$$

d) $M \in M_2(\mathbb{R})$ $f(M) = M$ avec $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

On a $f(M) = AM - MD$
$$= \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$$ (comme vu précédemment)
$$= \begin{pmatrix} z & t - y \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = t - y \\ z = z \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = t = 0 \end{cases}$

Ainsi $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ et comme $E_1 \neq \{0\}$ on en déduit que 1 est valeur propre de f.

De la même façon $f(M) = -M \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -t + y \\ z = -z \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = t = z = 0 \right.$

Ainsi $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$ et comme $E_{-1} \neq \{0\}$ on en déduit que -1 est valeur propre de f

e) De ce qui précède on a $Sp(f) = \{-1; 0; 1\}$.

De plus $\dim[\ker(f)] = 2$ et $\dim E_1 = \dim E_{-1} = 1$

Car $E_1 = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ et $E_{-1} = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

La somme des dimensions est égale à 4 $(2+1+1 = 4)$.

Donc f est diagonalisable.

f) Notons F la matrice de f dans sa base de vecteur propre. Notons F^3 celle de f^3 (sachant que $f \circ f \circ f = f^3$).

De (e) on a $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$F^3 = \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$ or on sait que $(-1)^3 = 1$.

On remarque que $F = F^3$.

Donc pour conclure $f \circ f \circ f = f$