

L'essentiel des primitives et intégrales

Fonction	Primitives
$u' \times u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$u' \times e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$\frac{k}{\sqrt{x}}$	$k \times 2\sqrt{u}$

Programme ECT/ECE/ECS

- Intégration par partie

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx \text{ avec } u \text{ et } v \in C^1 \text{ sur } [a; b]$$

- Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) + g'(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g'(x) dx$$

$$\int_a^b k \times f(x) dx = k \times \int_a^b f(x) dx$$

- Croissance de l'intégrale

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur } [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

- **Relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- **La parité**

Les conditions d'une fonction paire :

- $f(-x) = f(x)$
- L'intervalle I doit être centré en 0

Si f est paire sur $[-a; a]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \times \int_0^a f(x) dx$$

Les conditions d'une fonction impaires :

- $f(-x) = -f(x)$
- L'intervalle I doit être centré en 0

Si f est impaire sur $[-a; a]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- **Inégalité triangulaire intégrale**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

- **Théorème de comparaison**

On suppose que $\forall x \in [a, b], 0 \leq f(x) \leq g(x)$:

- 1) Si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente
- 2) Si $\int_a^b f(t) dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t) dt$ est divergente

- **Positivité de l'intégrale**

Si $f > 0$ avec $a < b$ alors $\int_a^b f(x) dx > 0$ par positivité de l'intégrale

- **Propriété d'ordre et d'intégration**

Si $f(x) > g(x)$ avec $a < b$ alors $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ d'après la propriété d'ordre et d'intégration

- **Intégrale de Gauss**

Ces deux intégrales généralisées convergent et ont pour valeur :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

- Changement de variable

Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ ($a < b$) et φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , strictement monotone, réalisant une bijection d'un intervalle $]\alpha, \beta[$ ($\alpha < \beta$) sur $]a, b[$

Les intégrales généralisées : $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$

sont de même nature et, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du \quad \text{si } \varphi \text{ est croissante}$$

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du \quad \text{si } \varphi \text{ est décroissante}$$

Programme ECE/ECS

- Somme de Riemann ou Méthode des rectangles

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

- Intégrale généralisée de Riemann

- 1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$
- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$

Programme ECS

- Fonction Gamma

Elle est définie, sous réserve de convergence, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Propriété

- 1) La fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$
- 2) Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
- 4) On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$