Exercice 1 1) a) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

b) Comme $A^3 = 0$, on déduit que le polynôme annulateur de A tel que $P(A) = 0$ est de la forme $X^3 = 0$. La seule solution possible de ce polynôme est $X = 0$. Ainsi $Sp(A) \subset \{0\}$

Or, on vérifie alors pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$X \in E_0(A) \Leftrightarrow$

$$(A - 0)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le système n'est pas de Cramer donc 0 est bien valeur propre de A.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ \quad -3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = +2y \pm z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Or $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \neq 0_{3,1}$ donc c'est bien un vecteur propre de $E_A(0)$ et une base de celui-ci.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{-1, -1, 1\}$ car on enlève au vecteur sa forme associée aux coordonnées de la base β.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 et la famille $\{(-1, -1, 1)\} \neq 0_{3}$ est une base de celui-ci.

d) $Sp(A) = Sp(f)$. Or $\dim \sum_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A) = 1 \leq 3$ (ordre de la matrice)

Ainsi A n'est pas diagonalisable et par définition f non plus.

Réservé à la correction

Réservé

à la

correction

2) a) la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est de cardinal 3 soit la dimension de E.
On veut vérifier que la famille est libre.
On pose $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} -a - b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \\ 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi (e'_1, e'_2, e'_3) étant libre c'est une base de E.

b) On calcule $f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)$

$$f(e'_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e'_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 . e'_1$$

$$f(e'_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 . e'_2$$

Ainsi $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Soit α et β deux réels

$$M = \alpha A + \beta I \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Écricome

Réservé à la correction

$\iff M = -\frac{1}{3}A + 3I$

b) On veut calculer $h(e_1'), h(e_2'), h(e_3')$

$$h(e_1') = M\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = e_1$$

$$h(e_2') = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = e_2' - e_1'$$

$$h(e_3') = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = -e_2' + e_3'$$

c) $M' = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Ainsi M est une matrice triangulaire donc inversible.

d)
$$(M-I)^3 = (-A+2I)^3$$
$$= (A^2+4I)(-A+2I)$$
$$= 2A^2 - 4A + 8I$$

Or
$$M^2 = (-A+3I)^2$$
$$= A^2 - 6A + 9I$$

Donc
$$(M-I)^3 = M^2 + (A^2 + 2A - I)$$
$$= M^2 + M^2 + 8A - 10I$$
$$= 2M^2 - 8M + 14I$$

Épreuve de : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (case à cocher)

15004591200

N° 500459

Mathématiques option Economique

Note en toutes lettres :

Note en chiffres : , / 20

Commentaire :

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 500459

Signature du correcteur

Réservé à la correction

Commencez à composer dès la première page ...

1) Comme $V^2 = T$, on a alors

$$VT = VV^2 = V^3 = V^2V = TV.$$

Comme V est associée à l'endomorphisme g et T à f, on a alors

$$VT = TV \Rightarrow g\circ f = f\circ g$$

2) a) Si $g(e_1') \in \mathrm{Ker}(f)$ alors

$$f(g(e_1')) = (0,0,0)$$

Or selon (1) $f(g(e_1')) = g(f(e_1')) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0.$

Donc $g(e_1') \in \mathrm{Ker}(f)$.

De ce fait

e_1' est vecteur propre de g et il existe une valeur propre (un réel a) telle que $g(e_1') = a e_1'$

b) $g(e_2') - a e_2 \in \ker(f)$ si

$f(g(e_2') - a e_2) = 0_{\mathbb{R}_3}$

$f(g(e_2') - a e_2') = f(g(e_2')) - a f(e_2')$

(car f est une application linéaire)

$= g(e_1') - a e_1'$

$\underset{2a}{=} a e_1' - a e_1' = 0$

Donc $g(e_2') - a(e_2') \in \ker(f)$.

c) $f \circ g(e_3') \underset{1.}{=} g \circ f(e_3')$

$= g(e_2')$

$\underset{2.b}{=} a e_2' + b e_1$

$g(e_3') - a e_3' - b e_2' \in \ker(f)$ si et seulement si

$f \circ g(e_3') - a f(e_3') - b f(e_2') = 0$

$\Leftrightarrow a e_2' + b e_1' - a e_2' - b e_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Écricome

Ainsi $(g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2) \in \mathrm{Ker}(f)$.

d) V est composée de colonnes correspondants à $g(e'_1)$, $g(e'_2)$ et $g(e'_3)$

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$g(e'_1) \underset{2a}{=} a(e'_1)$

$g(e'_2) \underset{2b}{=} b(e'_1) + a(e'_2)$

$g(e'_3) \underset{2c}{=} c(e'_1) + b(e'_2) + a(e'_3)$

donc $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

3) $V^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

Or si $V^2 = T$, on a

$\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases}$ or c'est impossible car $0 \neq 1$.

Donc $V^2 \neq T$.

Exercice 2 1) On peut conjecturer à partir du graphique que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, f admet un minimum local lorsque $x = 1$ et $y = 1$ tel que $f(1,1) = 3$.

Réservé

à la

correction

a) $(x,y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ car y^2 ne s'annule pas (quotient de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$)

De même $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi $f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Comme f est de classe C^2, on a $\partial_1 (f)(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$

$\partial_2 (f)(x,y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$

On cherche les points critiques de f soit les couples $A=(x,y)$ tels que

$$\begin{cases} \partial_1 (f)(x,y) = 0 \\ \partial_2 (f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ -\frac{2x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ y = \frac{x}{y^3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ y^4 = x \end{cases}$$

Or $y^4 = x$ seulement lorsque $x=0$ et $y=0$ ou $y=1$ et $x=1$. Or $x \neq 0$ et $y \neq 0$ donc l'unique couple est $A=(1,1)$.

e) f est de classe C^2 donc

$$\partial_{1,1}^{1}(f)(x,y) = \frac{2x}{x^4}$$

$$\partial_{1,2}^{2}(f)(x,y) = \partial_{2,1}^{2}(f)(x,y)$$ (théorème de Schwartz car $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert)

$$= -\frac{2y}{y^4}$$

$$\partial_{2,2}^{2}(f)(x,y) = \frac{-6y^2x}{y^6} + 2$$

La matrice hessienne $H = \nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} \\ -\frac{2}{1} & \frac{+6}{1}+2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

d) Si f admet un extremum local alors ses valeurs propres sont de même signe.

On pose $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(H - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

Si $(2-\lambda)(8-\lambda) = 4$ alors λ est valeur propre de H

Écricome

Commencez à composer dès la première page ...

$$(2-\lambda)(8-\lambda) = 16 - 2\lambda + \lambda^2 - 8\lambda$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

$\Delta = 100 - 64 = 36$

$\lambda_1 = \dfrac{10-6}{2} = 2$ $\qquad \lambda_2 = \dfrac{10+6}{2} = 8$

Réservé à la correction

Donc les deux racines sont positives ce qui implique que $Sp(H) = \{2, 8\}$ et donc f admet un minimum local en $(1,1)$.

$$f(1,1) = \frac{1}{1} + 1 + \frac{1}{1} = 3.$$

Partie B 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$f(x^n, 1)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x^n, 1) = n x^{n-1} - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= \frac{n x^{n-1} x^{2n} - n x^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= \frac{n x^{n-1}(x^{2n} - 1)}{x^{2n}}$$

Comme pour $x \in]0, +\infty[$ $x \mapsto n x^{n-1} \geqslant 0$ et $x \mapsto x^{2n} \geqslant 0$, le signe de la dérivée dépend de $x^{2n} - 1$. Or $x^{2n} \geqslant 1$ lorsque $x \geqslant 1$ (car si $x \in]0, 1]$ il va décroître) donc $f(x^n, 1) = h(x)$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc < 1

Ecricome

et strictement décroissante sur $]0,1[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $h_n(1) = 3$

$\lim_{x \to +\infty} h_n(x) = +\infty$ (car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$)

$\lim_{x \to 0^+} h_n(x) = -\infty$ (car $\lim_{x \to 0^+} x^n = 0$)

Réservé à la correction

Donc d'après le théorème des valeurs intermé-
-diaires, $h_n(x) = 4$ admet deux solutions
sur $\mathbb{R}_+^*$ car $4 \in]-\infty;3[$ et $4 \in [3,+\infty[$
De ce fait on note u_n et v_n ses deux solutions
tel que $u_n \in]0,1[$ et $v_n \in]1,+\infty[$ car $h_n(1)=3$
donc

$$0 < u_n < 1 < v_n .$$

3) a) Pour $x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n}$$

$$= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \frac{1}{x^n}$$

$$= \frac{(x^{n+1})^2 + 1 - x^n x^{n+1} - x}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{x^{2n+1}(x-1) + 1 - x}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

Écricome

Réservé à la correction

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$h_{n+1}(V_n) - 4 = \frac{(V_n - 1)(V_n^{2n+1} - 1)}{V_n^{n+1}}$$

Or $V_n > 1$ donc $V_n - 1 > 0$, $V_n^{2n+1} - 1 > 0$ et $V_n^{n+1} > 0$.

Donc $\frac{(V_n - 1)(V_n^{2n+1} - 1)}{V_n^{n+1}} > 0$ ce qui

signifie que la somme $h_{n+1}(V_n) - 4$ est positive
soit $h_{n+1}(V_n) - 4 \geq 0$
donc $h_{n+1}(V_n) \geq 4$.

c)

4) a) Comme $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et strictement minorée par 1 alors on peut conclure que cette suite converge vers l un réel et $l \geq 1$.

b) On suppose $l > 1$, ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} V_n^n = \lim_{n \to +\infty} l^n = +\infty \text{ (car } l > 1)$$

Épreuve de : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (case à cocher)

15004591200
N° 500459 E
Mathématiques option Economique

Note en toutes lettres :

Note en chiffres : .... , ... / 20

Commentaire :

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 500459

Signature du correcteur

Réservé à la correction

IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.

Commencez à composer dès la première page ...

C'est alors contradictoire car si $\lim_{n\to+\infty} V_n^n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} h_n(v_n) = +\infty$ or ce n'est pas 4 (car V_n est solution de $h_n(x) = 4$)

e) On en déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} V_n = l = 1$ car selon (d) $l > 1$ est absurde

5) a) On pose $A^n =$ " $V_n^{l^n} \leq 3$ " pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Pour $n = 1$ V_1 est la solution de l'équation

$f(V_1, 1) = V_1 + 1 + \frac{1}{V_1} = 4 \Leftrightarrow V_1 + 1 + \frac{1}{V_1} = 4$

$\Leftrightarrow V_1 + \frac{1}{V_1} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{V_1^2 + 1}{V_1} = 3$

$\Leftrightarrow V_1^2 + 1 = 3V_1$

$\Leftrightarrow V_1^2 - 3V_1 + 1 = 0$

Commencez à composer dès la première page ...

$\Delta = 9 - 4 = 5$ (deux solutions)

$r_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ $r_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ (car $3 > \sqrt{5} > 2$)

Or $V_1 > 1$ car $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \geq 1$ donc $V_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

et $2 < V_1 < 3$ donc $V_1 \leq 3$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé On suppose $A(n)$ vraie donc $V_n \leq 3$, on cherche alors $A(n+1)$

Soit $V_{n+1} \leq 3$ (vraie car $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante) donc $A(n+1)$ est vraie.

Conclusion On a montré par récurrence que $V_n \leq 3$ pour tout $n \geq 1$.

b)
```
function y = h(n, x)
    n = 0
    x > 0
    h = x^n + 1 + (1 \ (x^n))
  disp(h)
  endfunction
```

c)
```
if h(n,c) < 4 then
              else

disp( n )
```

écricome

Réservé à la correction

d) Le graphique affiche les valeurs de $(v_n)^n$ avec chaque n en abscisse (de 1 à 20)
On peut conjecturer que $\lim_{n \to +\infty} V_n^n \simeq 2,6$

e) On reprend l'équation faite dans la récurrence 5)a) en remplaçant V_1 par $(V_n)^n$ $\forall n \geq 1$, on trouve ainsi $(V_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

f) On applique ici le théorème du point fixe car f est continue sur V_n et $V_n > 0$ et défini sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(\ell^n, 1) = \ell \Leftrightarrow \ell^n + 1 + \frac{1}{\ell^n} = \ell$$

Or d'après ⓔ $\ell^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \ell$$

Ecricome

Réservé à la correction

Exercice 3

Pour tout $t \in \mathbb{R}$

1) $f(-t) = \begin{cases} \frac{1}{-t^3} & \text{si } -t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < -t < 1 \\ \frac{-1}{-t^3} & \text{si } -t \leq -1 \end{cases}$

$= \begin{cases} -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \\ 0 & \text{si } 1 > t > -1 \\ \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

$= f(t)$.

2) $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre en $+\infty$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}$ est une intégrale de Riemmann de type $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha = 3 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}$ converge

On a en outre, on pose A tel que $A \in]1, +\infty[$

$\int_1^A \frac{1}{t^3} dt = \int_1^A t^{-3} = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^A$

$= \frac{A^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2A^2} - \frac{1}{-2}$

$\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{-2A^2} = 0$ donc $\int_1^A \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2}$

Ecricome

Épreuve de : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (case à cocher)

15004591200

N° 500459

Mathématiques option Economique

Note en toutes lettres :

Note en chiffres : .... , ... / 20

Commentaire :

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 500459

Signature du correcteur

Réservé à la correction

IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.

Commencez à composer dès la première page ...

3) a) On pose pour $A > 1$, $u = -t$

alors $\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_{-A}^{-1} -\frac{1}{t^3} dt$

On a alors $u = (-(-A)) = A$ et $u = (-(-1)) = 1$
comme $A > 1$, on inverse les bornes.
$du = -dt$

$$= \int_{A}^{1} f(v) \cancel{-}dt$$

$$= \int_{1}^{A} f(u)du$$

Ainsi $\int_{1}^{A} f(u)du = \int_{1}^{A} f(t)dt$ (question 2) $= \frac{1}{2}$
(car elle converge également)

b) Pour $t \geqslant 1$, $f(t)$ est continue (ne s'annule pas) et positive
Pour $-1 < t < 1$, $f(t)$ est continue (la fonction nulle)

Mentionnez le nombre de pages : 17 sur : 21

et positive
Pour $t \leq -1$, $f(t) = -\frac{1}{t^3}$ est positive (car t^3 est négatif car $t \leq -1$) et continue (ne s'annule pas).
Donc $f(t)$ est continue et positive en tout $t \in \mathbb{R}$.

On considère $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$

Or $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} 0\,dt$ (converge et vaut 0).

De plus selon question 2 et 3)b), $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et f est bien une densité de probabilité.

4)a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- Pour $x \leq -1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left[-\frac{t^{-2}}{-2} \right]_{\beta}^{x}$

pour $\beta \in]-\infty, x[$.

$= \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2\beta^2}$

Or $\lim_{\beta \to -\infty} 2\beta^2 = +\infty$ donc $F_X(x) = \frac{1}{2x^2}$

- Pour $-1 < x < 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2} + \int_{-1}^{x} 0\,dt = \frac{1}{2}$

Écricome

Réservé

à la

correction

Pour $x \geqslant 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt$

$= \frac{1}{2} + \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^x$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2x^2}$.

donc $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} \text{ pour } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} \text{ si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

b) On considère $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$.

$\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} 0\,dt = 0$ (converge)

$\int_{-\infty}^{-1} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{t^{-1}}{1}\right]_\beta^{-1}$

avec $\beta \in]-\infty, -1[$. $= -1$ (car $\lim_{\beta \to +\infty} \frac{\beta^{-1}}{1} = 0$)

$\int_{1}^{+\infty} t(f(t))\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{t^{-1}}{1}\right]_1^A$ avec $A \in]1, +\infty[$

$= 1$ (car $\lim_{A \to +\infty} -\frac{A^{-1}}{1} = 0$)

Ainsi $E(X)$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = 0 - 1 + 1 = 0$.

$E(X) = 0$

c) Non, X n'admet pas de variance car $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ ne converge pas (car somme de Riemmam avec $\alpha = 1$) donc diverge et $E(X^2)$ n'existe pas.

Réservé à la correction

5) c) On considère $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx$

· $\int_{-\infty}^{1} x f_Y(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx = 0$ (converge)

· $\int_{1}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx = \int_{1}^{A} x f_Y(x)\,dx$ (on pose $A \in [1, +\infty[$)

$= \int_{1}^{A} \frac{2}{x^2}\,dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^A$

$= 2\left(-\frac{1}{A} + 1\right)$

$= 2$ (car $\lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{A} = 0$)

Donc $E(Y)$ existe et vaut 2.

Partie B 1) a) $Z(\Omega) = \left\{\frac{-1+1}{2} ; \frac{1+1}{2}\right\}$

$= \{0 ; 1\}$

Z suit une loi de bernouilli de paramètre $p = 1/2$.

$P(Z=1) = 1/2$

$P(Z=0) = 1 - p = 1/2$

$E(D) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$

Ecricome

Épreuve de : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (case à cocher)

15004591200

N° 500459 Y

Mathématiques option Economique

Note en toutes lettres :

Note en chiffres : ....., .../ 20

Commentaire :

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 500459

Signature du correcteur

Réservé à la correction

IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.

Commencez à composer dès la première page ...

b) $E(T) = E(DY) = E(D)\,E(Y)$ (indépendants)
donc $E(T)$ existe et
$E(T) = 2 \times 0 = 0$.

2) a) $F_U \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right)$
$= P\left(\frac{1}{1-U} \leq x^2\right)$
$= P(1-U \geq x^2)$
$= P(U \geq -x^2+1) = 1 - P(U \leq x^2+1)$

$F_V(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ -x^2 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Ecricome

Commencez à composer dès la première page ...

Réservé

à la

correction

Mentionnez le nombre de pages : sur :

Réservé

à la

correction

Mentionnez le nombre de pages : sur :

Ecricome

Réservé

à la

correction

Mentionnez le nombre de pages : sur :