

\*15041961200\*

N° 504196 ZER

Mathématiques option Economique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 

5	0	4	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : 20,00 / 20

Commentaire : \_\_\_\_\_

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

## Exercice 1

### Partie A

$$1) a) \underline{A^2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A^3} = A^2 \times A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0_3}$$

b) Soit  $P$  un polynôme défini par  $P(t) = t^3$ . De ce qui précède  $P$  est le polynôme annulateur de  $A$ .  
 Dans les valeurs propres <sup>susceptibles</sup> de  $A$  sont à trouver dans les racines de  $P$ . Or  $0$  est l'unique racine de  $P$ . Donc  $0$  est l'unique valeur possible de  $A$  et donc de  $f$ .

c) Soit  $x = (x, y, z)$ . Notons  $X$  le vecteur colonne associé à  $x$  dans la base canonique.  $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A)$ .

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 & L1 \\ -x - y - 2z = 0 & L2 \\ x + y + 2z = 0 & L3 \end{cases} \begin{cases} x = 2y + z \\ x = -y - 2z \\ x = -y - 2z \end{cases}$$

Réservé  
à la  
correction

Signature du correcteur

$$x \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = -z \\ x = y \end{cases}$$

Donc  $\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ -y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$

On en déduit  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}[(1, 1, -1)]$ , ce vecteur est unique et non nul, c'est donc une base de Ker(f).  
De plus,  $\dim[\text{Ker}(f)] = 1$

d) Raisonnons par l'absurde : Si A était (donc f) diagonalisable, alors il existerait une matrice diagonale D tel que  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
Le théorème de diagonalisation nous assure que  $A = PDP^{-1}$  or D est la matrice nulle donc on aurait  $A = O_3$  ce qui est absurde car  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   
Donc l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable

2) Soient  $e_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (2, -1, 1)$  et  $e_3 = (-1, 2, 1)$   
Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que (E) :  $ae_1 + be_2 + ce_3 = (0, 0, 0)$

$$(E) : \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ 3b - 3c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 3b = 0 \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases}$$

(E)  $\Leftrightarrow a = b = c = 0$  - Donc la famille  $B' = (e_1, e_2, e_3)$  est libre.  
C'est une famille de 3 vecteurs libres et E est de dimension 3 car  $E = \mathbb{R}^3$  (évident), donc la famille est également génératrice.

Ainsi B' est une base de E

Réservé  
à la  
correction

b) Soit  $x\vec{e}_1, x\vec{e}_2, x\vec{e}_3$  les vecteurs colonnes des vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  dans la base canonique.

Soit

$$A x\vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ le vecteur colonne associé à } f(\vec{e}_1) \text{ dans la base canonique.}$$

On en déduit  $f(\vec{e}_1) = (0, 0, 0) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$ .

De la même façon avec :  $A x\vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

et  $A x\vec{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$  et  $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ .

On a les coordonnées des images des vecteurs de la base  $B'$ , on en déduit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la mat représentative de  $f$  dans  $B'$ .

3)a) Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\Pi = \alpha A + \beta I$ .

$$\text{On a } \Pi = \alpha A + \beta I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 4/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients on en déduit :

$$\Pi = \alpha A + \beta I \Leftrightarrow \begin{cases} 4/3 = -\alpha/3 + \beta \\ -2/3 = 2\alpha/3 + 0\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Donc  $\Pi = -A + I$

b) En procédant de manière identique à 2)b)

$$\text{On a } \Pi x\vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{e}_1.$$

$$\Pi x\vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{e}_2 - x\vec{e}_1.$$

$$\Pi x e_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = x e_3 - x e_2$$

On a les coordonnées des images des vecteurs de la base  $B'$  avec :

$$f(e_1) = e_1$$

$$f(e_2) = e_2 - e_1$$

$$f(e_3) = e_3 - e_1$$

Donc  $N' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  où  $N$  représente la mat de  $h$  dans  $B'$ .

c) On constate que  $N'$  est une matrice triangulaire supérieure à 3 pivots non nuls. Par conséquent  $N'$  est inversible donc  $h$  est bijectif.

On en déduit, ainsi, que  $N$  est inversible

$$d) (N - I) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a  $(N - I) = -A$  . Etant donnée que 1b) nous dit que  $A^3 = 0_3$  (donc  $-A^3 = 0_3$ )

On en déduit  $(N - I)^3 = -A^3 = 0_3$ .

$N$  est inversible (3c) donc  $N^{-1}$  existe.

$$\begin{aligned} (N - I)^3 &= (N - I)^2 (N - I) \\ &= (N^2 - 2N + I)(N - I) \\ &= N^3 - N^2 - 2N^2 + 2N + N - I \\ &= N^3 - 3N^2 + 3N - I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N - I)^3 = 0_3 &\Leftrightarrow N^3 - 3N^2 + 3N - I = 0 \\ &\Leftrightarrow N^3 - 3N^2 + 3N = I \\ &\Leftrightarrow N(N^2 - 3N + 3I) = I \end{aligned}$$



\*15041961200\*

N° 504196 Z

Mathématiques option Economique

et reportez votre numéro de candidat :

 N° : 

5	0	4	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : \_\_\_\_\_ / 20

 Commentaire : \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

Donc en posant  $\Gamma^{-1} = \Gamma^2 - 3\Gamma + 3I$  .

On a bien  $\Gamma\Gamma^{-1} = \Gamma^{-1}\Gamma = I$  .

Ainsi  $\Gamma^{-1} = \Gamma^2 - 3\Gamma + 3I$

 Réservé  
à la  
correction

e) Toute matrice non nulle commute avec la matrice identité . De plus  $\forall k \geq 3$   $A^k = o_3(1/k)$ , ce qui signifie que la matrice  $A$  est nilpotente .

De 1)a) on a  $\Gamma = (-A + I)$  . Donc d'après la formule du binôme de Newton on a :

$$\begin{aligned} \Gamma^n &= (-A + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k} + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k} \quad (\text{Chasles}) \\ &= \binom{n}{0} (-A)^0 \cdot I^n + \binom{n}{1} (-A) I^{n-1} + \binom{n}{2} (-A)^2 I^{n-2} + 0 \\ &= I - nA + \frac{n!}{2!(n-2)!} A^2 \end{aligned}$$

Donc  $\Gamma^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2$

pour  $n = -1$  on a  $A^{-1} = I + A + A^2$ .

or  $A^{-1} = (A^2 - 3A + 3I)$  et  $A = I - A$ .

Donc  $A^{-1} = (I - A)^2 - 3(I - A) + 3I$   
 $= I - 2A + A^2 - 3I + 3A + 3I$   
 $= A^2 + A + I$ .

Ainsi la formule reste valable pour  $n = -1$

Réservé  
à la  
correction

Partie B

Soit  $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$V^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$

$TU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par identification des coefficients on obtient le système (S) suivant :

(S) :  $\begin{cases} d = 0 \\ a = e \\ b = f \\ g = 0 \\ e = h \\ h = i \\ i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e = i \\ b = f \\ c = c \\ d = g = h = 0 \end{cases}$

1) Soit  $V^2 = T$

Donc  $V^T = VV^2 = V^3 = V^2V = TV$

De plus  $V$  est la matrice représentative de  $g$  dans  $B'$  et  $T$  est la matrice représentative de  $f$  dans  $B'$ .

on en déduit donc  $g \circ f = f \circ g$  ✓

2)a) de 1) on peut écrire:

$$f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i) \quad \text{car } f(e_i) = 0 \quad (2b)$$

$$\text{Donc } f(g(e_i)) = 0 \quad \text{et } g(e_i) \neq 0 \quad \text{Donc } \underline{g(e_i) \in \text{Ker}(f)}$$

Ainsi il existe un réel  $a$  tel que  $g(e_i) = a e_i$  ✓

$$\begin{aligned} b) \quad f(g(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}}) &= f(g(e_{\bar{i}})) - a f(e_{\bar{i}}) \quad (\text{linéarité de } f) \\ &= g f(e_{\bar{i}}) - a f(e_{\bar{i}}) \\ &= g(e_i) - a(e_i) \quad \text{car } g(e_i) = a e_i \\ &= 0 \quad (\text{car } g(e_i) = a e_i) \end{aligned}$$

$$\text{et } (g(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}}) \neq 0 \quad \text{donc } \underline{(g(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}}) \in \text{Ker}(f)}$$

Ainsi il existe un réel  $b$  tel que  $g(e_{\bar{i}}) = b e_{\bar{i}} + a e_{\bar{i}}$

$$\begin{aligned} c) \quad \underline{f \circ g(e_{\bar{i}})} &= g \circ f(e_{\bar{i}}) \\ &= g(e_i) \\ &= \underline{a e_{\bar{i}} + b e_{\bar{i}}} \quad (\text{question 2)b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(g(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}} - b e_{\bar{i}}) &= f(g(e_{\bar{i}})) - a f(e_{\bar{i}}) - b f(e_{\bar{i}}) \quad (\text{linéarité de } f) \\ &= f(a e_{\bar{i}} + b e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}} - b e_{\bar{i}} \\ &= a f(e_{\bar{i}}) + b f(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}} - b e_{\bar{i}} \quad (\text{linéarité de } f) \\ &= a e_i - a e_i - b e_i \\ &= g(e_i) - g(e_{\bar{i}}) \end{aligned}$$

car  $g(e_i) \in \text{Ker}(f)$  et  $g(e_{\bar{i}}) \in \text{Ker}(f)$ .

$$\underline{\text{Donc } (g(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}} - b e_{\bar{i}}) \in \text{Ker}(f)} \quad [\text{et } (g(e_{\bar{i}}) - a e_{\bar{i}} - b e_{\bar{i}}) \neq 0]$$

d) ~~S~~ ~~g~~ ~~f~~  $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

On a  $g(e_1) = ae_1$

$g(e_2) = be_1 + ae_2$

et avec  $g(e_3) = ce_1 + ae_3 + be_2$

On a les coordonnées des images des vecteurs de  $B'$

on en déduit  $V$ , la matrice représentative de

$g$  dans  $B'$  tel que  $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

3)  $V^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$V^2 = T \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ 0 = 1 \\ 2ac + b^2 \end{cases}$  → ce qui est impossible, contradictoire

Donc il n'existe aucun endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant

$g \circ g = f$  ✓

\* \* \*

Exercice 2

1) A partir du graphique on conjecture que  $f$  admet un minum local au point (1, 1) dont la valeur approximative est 3,01. ✓



\*15041961200\*

N° 50419

Mathématiques option Economique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 

5	0	4	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : \_\_\_\_\_ / 20

Commentaire : \_\_\_\_\_

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

2)a)  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*_+)^2 \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$

La fonction  $(x, y) \mapsto \frac{x}{y^2}$  est une fonction rationnelle donc de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}^*_+)^2$ . La fonction  $(x, y) \mapsto y^2$  est de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}^*_+)^2$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) est de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}^*_+)^2$ .

Donc par somme  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$

$f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$

b) Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  :

$$J_1(f)(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$J_2(f)(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$$

On en déduit  $\nabla$  le gradient de  $f$  où :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+ \quad \nabla = \nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \\ -\frac{2x}{y^3} + 2y \end{pmatrix}$$

Rep) points) critiques) de  $f$  sont les valeurs du couple  $(x, y)$  qui annule le gradient  $\nabla$ .

Réservé  
à la  
correction

Point critique de  $f \Rightarrow \bar{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ -\frac{2x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y \quad (\text{par parties})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y \\ -2(1+x^3) = 0 \quad (A) \end{cases}$$

or l'unique solution de (A) est  $x=1$ .

Ainsi en en déduit  $A = (1, 1)$ .

c)  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  :

$$J_{1,1}^2(f)(x,y) = \frac{2}{x^3}$$

Par Schwarz  $J_{1,2}^2(f)(x,y) = J_{2,1}^2(f)(x,y) = \frac{-2}{y^3}$

$$J_{2,2}^2(f)(x,y) = \frac{6xy}{y^4} + 2$$

On en déduit la matrice hessienne  $H$  au point  $A$  :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{1^3} & \frac{-2}{1^3} \\ \frac{-2}{1^3} & \frac{6 \times 1}{1^4} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

d) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , par théorème  $\lambda$  est valeur propre de  $H$  si la matrice  $H - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible.

La caractérisation d'une matrice carrée d'ordre 2 nous permet d'écrire :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } H \Leftrightarrow (2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 - 10\lambda + \lambda^2 = 0$$

Déterminons le discriminant  $\Delta$  de ce polynôme

$$\Delta = 100 - 4 \times 12 \times 1$$

$\Delta = 52 > 0$  donc ce polynôme admet deux racines  $r_1$  et  $r_2$  distinctes :

$$r_1 = \frac{10 + \sqrt{52}}{24} > 0 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{10 - \sqrt{52}}{24} > 0 \quad \text{car} \quad \sqrt{100} > \sqrt{52}$$

$$r_1 = \frac{10 + \sqrt{52}}{24} = \frac{\cancel{10} + \sqrt{52}}{\cancel{24}} = \frac{\cancel{10} + \sqrt{52}}{\cancel{24}} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{10 - \sqrt{52}}{24} = \frac{\cancel{10} - \sqrt{52}}{\cancel{24}} = \frac{\cancel{10} - \sqrt{52}}{\cancel{24}}$$

Ainsi  $Sp(H) = \{r_1, r_2\}$ . Les deux valeurs propres de  $H$  sont de même

signe donc  $f$  admet un extremum local et vu qu'elles sont positives,  $f$  admet un minimum local

### Partie B

$$\forall x > 0, n \in \mathbb{N}^* \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1)  $h_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+_*$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) par sommes de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^+_*$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$$\forall x > 0, n \in \mathbb{N}^* \quad h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= nx^{n-1} \left( 1 - \frac{1}{x^{2n}} \right)$$

On a  $nx^{n-1} > 0$ , cependant sur  $]0, 1[$   $1 - \frac{1}{x^{2n}} < 0$   
 et sur  $]1, +\infty[$   $1 - \frac{1}{x^{2n}} > 0$

On en déduit que  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$   
 et  $h_n$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$

2)  $h_n$  est continue (dérivable) ~~est~~ <sup>et</sup> strictement décroissante sur ]0, 1[ , de plus  $h_n(]0, 1[) = ]3, +\infty[$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h_n(x) = +\infty$  et  $h_n(1) = 3$ .

Donc  $h_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  sur  $]3, +\infty[$  ( $h \in ]3, +\infty[$ ), donc l'équation  $h_n(x) = h$  admet une solution sur ]0, 1[ que l'on note en ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

Réservé  
à la  
correction

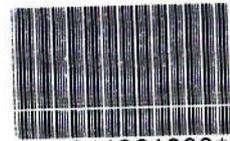
. De la même façon  $h_n$  est dérivable et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ , donc  $h$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $[3, +\infty[$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = +\infty$ .

On a bien  $h \in ]3, +\infty[$ , donc l'équation  $h_n(x) = h$  admet une unique solution sur  $[1, +\infty[$  que l'on note  $u_n$ .

Ainsi  $0 < u_n < 1 < u_n$

3) a) On a  $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \underline{h_{n+1}(x) - h_n(x)} &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\ &= \frac{x^{2(n+1)} + x^{n+1} + 1 - x^{2n+1} - x^{n+1} - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{1 - x + x^{2(n+1)} - x^{2n+1}}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$



\*15041961200\*

N° 5041:  
Mathématiques option Economique

et reportez votre numéro de candidat :

N°: 

5	0	4	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : \_\_\_\_\_ / 20

Commentaire : \_\_\_\_\_

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

De 3)a) on peut écrire :

$$h_{n+1}(u_n) - h_n(u_n) = \frac{(u_n - 1)(u_n^{2^{n+1}} - 1)}{u_n^{n+1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$   
car  $u_n > 1$       Donc  $u_n - 1 > 0$  ;  $u_n^{2^{n+1}} - 1 \geq 0$  ;  $u_n^{n+1} \geq 0$

Ainsi on a  $h_{n+1}(u_n) - h_n(u_n) \geq 0$  ✓  
car  $h_n(u_n) = 4$  (B;2)

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_{n+1}(u_n) \geq 4$  ✓

c) on a  $h_n(u_n) = 4$       donc  $h_{n+1}(u_{n+1}) = 4$

car on a  $h_{n+1}(u_n) \geq 4$       (3)a)

donc  $h_{n+1}(u_n) \geq h_{n+1}(u_{n+1})$

par croissance de la fonction  $h_{n+1}$  sur  $[1, +\infty[$  on a :

$u_n \geq u_{n+1} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante ✓

Réservé  
à la  
correction

Réservé  
à la  
correction

h) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par 1, donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite  $l$  tel que  $l \geq 1$ , car  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 1$ .

b) Supposons que  $l > 1$

alors on peut écrire  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n^n = e^{n \ln(u_n)} \geq e^{n \ln(l)}$

car  $\ln(l) > \ln(1) = 0$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(l) = +\infty$ , et par composée

on en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = +\infty$ . Ce qui est

absurde car  $(u_n)$  est convergente.

c) Etant donné que  $l > 1$  ne fonctionne pas, il se pourrait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  où  $l = 1$ .

~~5) a)  $\forall n \geq 1$ , de 2) on a  $\ln(u_n) \geq \ln(1)$~~

~~Notons  $h_n^{-1}$  la bijection réciproque de  $h_n$  et qui est de même monotone.~~

~~Par croissance de  $h_n^{-1}$  sur  $[\ln(1); +\infty[$  on en déduit :~~

~~$$h_n^{-1} \circ \ln(u_n) \geq h_n^{-1} \circ \ln(1)$$

$$u_n \geq 1$$~~

s)a)

Réservé  
à la  
correction

```

b) fonction y = h(n, x)
n = input("n = un entier naturel non nul")
x = input("x = un réel strictement supérieur à 0")
y = x^n + 1 + 1/(x^n)
end fonction
    
```

```

c) fonction res = u(n)
    a = 1
    b = 3
    while (b-a) > 10^(-5)
        c = (a+b)/2
        if h(n, c) < 4 then
            a = c
        else
            b = c
        end
    end
    disp([a, b])
end fonction
    
```

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME - Tous droits réservés

d) Le graphique affiche 20 valeurs de la suite  $Y_n$  définie par  $Y_n = v_n^n$ .

On remarque que cette suite est constante car les  $X$  sont alignés.

e)

Réservé  
à la  
correction



\*15041961200\*

N° 504196

Mathématiques option Economique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 

5	0	4	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : \_\_\_\_\_ / 20

Commentaire : \_\_\_\_\_

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

## Exercice 3

### Partie A

•  $\forall t \in ]-1; 1[$   $t$  est centrée en 0  
 $f(-t) = 0 = f(t)$

•  $\forall t \notin ]-1; 1[$   $t$  est centrée en 0  
 $f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = -\frac{1}{t^3} = -f(t) \quad \text{si } t \geq 1$

$f(-t) = \frac{-1}{(-t)^3} = \frac{1}{t^3} = f(t) \quad \text{si } t \leq -1$

Donc  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(-t) = f(t)$ ,  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$

la fonction  $t \mapsto 1/t^3$  est continue sur  $[1; +\infty[$ , le seul problème  
 2)  $\int_1^A f(t) dt$  Soit  $A \in [1; +\infty[$  on note  $I A = \int_1^A f(t) dt$

$$I A = \int_1^A f(t) dt = \int_1^A \frac{1}{t^3} dt = \int_1^A t^{-3} dt = \left[ \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^A$$

$$I A = -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2}$$

Réservé  
à la  
correction

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$$

Donc l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut  $\frac{1}{2}$

3)a)  $A \geq 1$  on a  $\int_A^1 f(t) dt = \int_{-A}^{-1} f(t) dt$

Soit  $u = -t$ . La fonction  $t \mapsto -t$  est de classe  $C^1$  sur  $[-A; -1]$ .

Calculons le différentiel  $\frac{du}{dt} = \frac{d(-t)}{dt} = -1$

Donc  $du = -dt$ .

si  $t = -1$  alors  $u = 1$

si  $t = -A$  alors  $u = A$

Par changement de variable on peut écrire :

$$\int_A^1 f(t) dt = \int_A^1 f(-u) \cdot (-du)$$

$$= - \int_A^1 f(u) du$$

car  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$   
donc  $f(-u) = f(u)$

$$= \int_1^A f(u) du$$

par propriété

Donc  $\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du$

Réservé  
à la  
correction

Dès lors lorsque  $A$  tend vers  $+\infty$  l'intégrale

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt \text{ admet une limite finie.}$$

Donc on déduit de ce qui précède que l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$  converge et vaut  $\frac{1}{2}$ .

Réservé  
à la  
correction

b) i) La restriction de  $f$  sur  $[1; +\infty[$  est continue car  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  est continue sur cet intervalle.

La restriction de  $f$  sur  $]-\infty; -1]$  est continue car  $t \mapsto -\frac{1}{t^3}$  est continue sur cet intervalle.

La restriction de  $f$  est nulle sur  $]-1; 1[$  donc  $f$  est continue sur cet intervalle.

Ainsi  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut être en  $-1$  et  $1$ .

- ii)
- si  $t \geq 1$  on a  $\frac{1}{t^3} > 0$  donc  $f(t) > 0$
  - si  $t \in ]-1; 1[$  on a  $f(t) = 0$
  - si  $t \leq -1$  on a  $f(t) > 0$  car  $-\frac{1}{t^3} > 0$ .

Donc  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$   $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$

iii)  $f$  est la restriction d'une fonction nulle sur  $]-1; 1[$ , donc l'intégrale  $\int_{-1}^1 f(t) dt$  converge et vaut 0.

De plus de ce qui précède on a vu que les intégrales impropres  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$  sont convergentes et valent  $\frac{1}{2}$ .

La somme de trois intégrales convergentes est convergente et grâce à Charles on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1

Donc  $f$  est une densité de probabilité

h) Soit  $X$  une variable aléatoire, admettant  $f$  pour densité, on note  $F_X$  sa fonction de répartition, déterminons  $F_X$ .

• 1:  $x \leq -1$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Soit  $B \in ]-\infty; x]$  
$$I_B = \int_B^x \frac{-1}{t^3} dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2t^2} \right]_B^x \quad (\text{question 1})$$

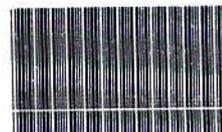
$$= \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2B^2} \quad \text{or } \lim_{B \rightarrow -\infty} I_B = \frac{1}{2x^2}$$

Donc  $F_X(x) = \frac{1}{2x^2}$

• 2:  $x \in ]-1; 1[$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt \quad (\text{Charles})$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2(-1)^2} + 0 = \frac{1}{2}$$



\*15021061200\*

N° 504196 Zr  
Mathématiques option économique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 

5	0	4	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : \_\_\_\_\_ / 20

Commentaire : \_\_\_\_\_

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

o s :  $x \geq 1$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \quad (\text{Chapitre 1})$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{-2t^2} \right]_{-1}^x \quad (\text{d'après 1})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{Donc } F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in ]-\infty; -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in ]-1; 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Montrer que  $X$  admet une espérance, autrement dit, montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  est absolument convergente.

La fonction  $t \mapsto |t f(t)|$  est continue par morceaux et nulle sur  $]-1; 1[$ , donc l'intégrale  $\int_{-1}^1 |t f(t)|$  est convergente et vaut 0.

Réservé  
à la  
correction

$$\forall t \geq 1 \quad |t f(t)| = t f(t) = \frac{1}{t^2}$$

Donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} t f(t) dt$  converge et vaut  $a$  ;

or la fonction  $h(t) = t f(t)$  est impaire car  $t \mapsto t$  est impaire et  $f$  est paire.

Donc on en déduit que l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^{-1} |t f(t)| dt$  converge et vaut  $-a$ .

Par conséquent,  $X$  admet une espérance tel que

$$\underline{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = -a + 0 + a = \underline{0}$$

c) On remarque que  $\forall t \geq 1$

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

est une intégrale de Riemann de paramètre 1, donc elle diverge. On en déduit que  $X$  n'admet pas de moment d'ordre 2 et par conséquent pas de variance.

5) Soit  $Y = |X|$ , notons  $F_Y$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y$ .

$Y$  prend ses valeurs dans  $[1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(|X| \leq x) \\ &= P(-x \leq X \leq x) \end{aligned}$$

Réservé  
à la  
correction

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)$$

si  $x \geq 1$  alors  $-x \leq -1$  et si  $x \leq -1$  alors  $-x \geq 1$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 1/2 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Réservé  
à la  
correction

$Y$  est une variable aléatoire, montrons qu'elle est à

densité:

la restriction de  $F_Y$  est continue sur  $[1; +\infty[$  car  $x \mapsto 1 - \frac{1}{2x^2}$  est continue sur  $[1; +\infty[$ .

la restriction de  $F_Y$  est continue sur  $] -\infty; -1] \cap \mathbb{R}$  comme constante

De plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Donc  $F_Y$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $F_Y$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf peut être en 1.

Donc  $Y$  est une variable aléatoire à densité

b) Il suffit de dériver  $F_Y$  obtenu antérieurement

$$\text{Donc : } f_Y(x) = \begin{cases} 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Montrons que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)|$  est convergente.

La fonction  $t \mapsto |t f(t)|$  est nulle et continue par morceaux sur  $] -\infty; 1[$ , donc l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^1 |t f(t)|$  est convergente et vaut 0.

$\forall t \geq 1$  on a  $|tf(t)| = tf(t) = \frac{2}{t^2}$ .

Soit  $B_1 \in [1; +\infty[$  on note  $I_{B_1} = \int_1^{B_1} \frac{2}{t^2} dt$

$I_{B_1} = \left[ -\frac{2}{t} \right]_1^{B_1} = -\frac{2}{B_1} + 2$

On a  $\lim_{B_1 \rightarrow +\infty} I_{B_1} = 2$ , donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$

est (absolument) convergente. Donc  $Y$  admet une espérance et on a  $E(Y) = 2$

Partie B

1) a)  $D \in \{-1; 1\}$  et  $P(D=1) = P(D=-1) = \frac{1}{2}$ .

$Z = \frac{D+1}{2}$

Si  $D = -1$  alors  $Z = \frac{-1+1}{2} = 0$ .

Si  $D = 1$  alors  $Z = \frac{1+1}{2} = 1$ .

$P(Z=0) = P(D=-1) = \frac{1}{2}$   
 $P(Z=1) = P(D=1) = \frac{1}{2}$  Donc  $Z \in B\left(\frac{1}{2}\right)$

On en déduit  $E(Z) = \frac{1}{2}$ .

De plus  $Z = \frac{D+1}{2} \Leftrightarrow D = 2Z - 1$ .

Donc  $E(D) = E(2Z - 1)$   
 $= 2E(Z) - 1$  (par linéarité de l'espérance)  
 $= 0$  Donc  $E(D) = 0$

Réservé  
à la  
correction

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME — Tous droits réservés



\*15041961200\*

N° 50419

Mathématiques option Economique

et reportez votre numéro de candidat :

 N° : 

5	0	3	1	9	6
---	---	---	---	---	---

Note en toutes lettres : \_\_\_\_\_

Note en chiffres : \_\_\_\_\_ / 20

 Commentaire : \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES  
 SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

 b) on a  $T = DY$ .

On a vu que  $D$  et  $Y$  admettent des espérances donc on en déduit que  $T$  également.

De plus 
$$\begin{aligned} E(T) &= E(DY) \\ &= E(D)E(Y) \quad (\text{par indépendances, enano}) \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

c) La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements  $(D = k)_{k \in \{-1, 1\}}$  nous assure que :

$\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = P([T \leq x] \cap [D = 1]) + P([T \leq x] \cap [D = -1])$   
 car  $T = DY$

Donc 
$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P([DY \leq x] \cap [D = 1]) + P([DY \leq x] \cap [D = -1]) \\ &= P([Y \leq x] \cap [D = 1]) + P([Y \leq -x] \cap [D = -1]) \\ &= P(Y \leq x) P(D = 1) + P(Y \geq -x) P(D = -1) \end{aligned}$$

On peut écrire  $P(Y \geq -x) = P(Y \geq -x)$ ; de plus par indépendances de  $D$  et  $Y$  on a

$$P(T \leq x) = P(Y \leq x) P(D = 1) + P(Y \geq -x) P(D = -1)$$

 Réservé  
à la  
correction

$$P(D=1) = P(D=-1) = \frac{1}{2}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(T \leq x) = \frac{1}{2} P(Y \leq x) + \frac{1}{2} P(Y \geq -x)$

d) en notant  $F_T$  la fonction de répartition de  $T$  on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad F_T(x) &= P(T \leq x) \\ &= \frac{1}{2} (P(Y \leq x) + P(Y \geq -x)) \\ &= \frac{1}{2} (F_Y(x) + 1 - F_Y(-x)) \\ &= ? \end{aligned}$$

2) Soit  $U \in \mathcal{U}(]0, 1[)$  et  $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$

a) Notons  $F_U$  la fonction de répartition de  $U$  on a :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ x & ; x \in ]0, 1[ \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

b) Notons  $F_V$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $V$ . où  $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad F_V(x) &= P(V \leq x) \\ &= P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \end{aligned}$$

Réservé  
à la  
correction

$$\begin{aligned}
 F_U(x) &= P\left(\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right) \quad \text{par décroissance de la fonction} \\
 &\quad \text{inverse sur } \mathbb{R}^+ \\
 &= P\left(1-U \geq \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{par croissance de la fonction} \\
 &\quad \text{carré sur } \mathbb{R}^+ \\
 &= P(-U \geq \frac{1}{x^2} - 1) \\
 &= P(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}) \\
 &= F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)
 \end{aligned}$$

Réservé  
à la  
correction

$$\begin{aligned}
 n: x &\leq 0 \\
 n: x &\in ]0, 1[ \\
 n: x &\notin ]0, 1[ \\
 F_U(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\
 F_U(x) &= 0
 \end{aligned}$$

3) a) fonction  $a = D(n)$

$n = \text{input}$  ("n est un entier supérieur ou égale à 1")

$Z = \text{rand}(1, n, 'b.n', 1/2)$

$D = 2 * Z - 1$

endfunction

b) "sqrt" représente la racine carrée, donc il semblerait que U soit la variable aléatoire du vecteur c

la commande  $\text{sum}(c)/n$  renvoie :  $\frac{1}{n} \sum$

Réservé  
à la  
correction

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME — Tous droits réservés

concours écritome 2019

Mentionnez le nombre de pages :

sur :