Correction par

Mister **PREPA**

1) • $\forall P,Q\in\mathbf{R}_n\left[X\right],\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $\Phi(\lambda P+Q)=\left((\lambda P+Q)(x_0),(\lambda P+Q)(x_1),\ldots,(\lambda P+Q)(x_n)\right)$

$$=\lambda\left(P(x_0),P(x_1),\ldots,P(x_n)\right)+\left(Q(x_0),Q(x_1),\ldots,Q(x_n)\right)$$
$$=\lambda\Phi(P)+\Phi(Q).$$

Φ est linéaire de $\mathbf{R}_n\left[X\right]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

• Soit $P\in\mathbf{R}_n\left[X\right]$. $\Phi(P)=0_{\mathbf{R}^{n+1}}\Leftrightarrow\left(P(x_0),P(x_1),\ldots,P(x_n)\right)=\left(0,0,\ldots,0\right)$

$$\Leftrightarrow P(x_0)=P(x_1)=\ldots=P(x_n)=0.$$

Comme $P\in\mathbf{R}_n\left[X\right]$ et que $x_0\,,x_1\,,x_2\,,\ldots\ldots,x_n$ sont $\boldsymbol{n+1}$ réels **distincts** , on a $\Phi(P)=0_{\mathbf{R}^{n+1}}\Leftrightarrow P=0_{\mathbf{R}_n[X]}$.

On en déduit que $Ker(\Phi)=\left\{0_{\mathbf{R}_n[X]}\right\}$ et donc que Φ est injective .

Comme $\dim\mathbf{R}_n\left[X\right]=\dim\mathbf{R}^{n+1}\,(=n+1)$, Φ est aussi surjective . Finalement Φ est bijective .

CCL : L'application linéaire Φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n\left[X\right]$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

2) Soit $j\in[\![0,n]\!]$. $\Phi(X^j)=(x_0{}^j\,,x_1{}^j\,,\ldots\ldots,x_n{}^j)$. $(e_1,e_2,\ldots,e_{n+1})$ désigne la base cannonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

D'où
$$\underset{(1,X,X^2,\ldots,X^n),(e_1,e_2,\ldots,e_{n+1})}{mat}(\Phi)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\Phi(1) & \Phi(X) & \Phi(X^2) & \ldots\ldots & \Phi(X^n)\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & x_0 & x_0{}^2 & \cdots\cdots & x_0{}^n\\ 1 & x_1 & x_1{}^2 & \cdots\cdots & x_1{}^n\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n{}^2 & & x_n{}^n\end{pmatrix}_{/(e_1,e_2,\ldots,e_{n+1})}\end{array}$$
(matrice de Vandermonde)

3) a) $\deg(L_j)=n$ donc $L_j\in\mathbf{R}_n\left[X\right]$. Soit $\lambda_0\,,\ldots.\lambda_n\in\mathbf{R}$. $\sum_{j=0}^{n}\lambda_jL_j=0_{\mathbf{R}_n[X]}\Rightarrow\forall x\in\mathbf{R}\,,\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\,L_j\,(x)=0$.

Pour $x=x_i\quad(0\le i\le n)$, on obtient $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\underbrace{L_j(x_i)}_{=0\text{ si }j\neq i}=\lambda_i\underbrace{L_i(x_i)}_{=1}=0$ et donc $\lambda_i=0$.

Finalement $\sum_{j=0}^{n}\lambda_jL_j=0_{\mathbf{R}_n[X]}\Rightarrow\lambda_0=\ldots.=\lambda_n=0$.

$(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ est donc une famille libre à $n+1$ éléments de $\mathbf{R}_n\left[X\right]$.

Comme $\dim\mathbf{R}_n\left[X\right]=n+1$, $\boxed{(L_0,L_1,\ldots,L_n)\text{ est une base de }\mathbf{R}_n\left[X\right]}$

b) Soit $j\in[\![0,n]\!]$. $\boxed{\Phi(L_j)=(L_j(x_0),L_j(x_1),\ldots.,L_j(x_n))=(0,0,\ldots.,0,\underbrace{1}_{j+1^{i\grave{e}me}},0\ldots,0)=e_{j+1}}$ autrement dit

l'image de la base $(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ de $\mathbf{R}_n\left[X\right]$ par Φ est la base canonique $(e_1,e_2,\ldots,e_{n+1})$ de $\mathbf{R}^{n+1}$.

On retrouve que $\boxed{\text{l'application linéaire }\Phi\text{ est un isomorphisme de }\mathbf{R}_n\left[X\right]\text{ sur }\mathbf{R}^{n+1}}$.