



G9-00119  
110673  
Maths E

Code épreuve :

226

Nombre de pages :

22

Session :

2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1- si  $x \in ]0; 1[$ ,  $1-x \in ]0; 1[$  donc  $\ln(1-x)$  est bien défini. Donc  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$  en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\forall x \in ]0; 1[, f'(x) = \left( \frac{-\ln x}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} \right) \times \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{-\ln x}{(1-x)(\ln x)^2} - \frac{\ln(1-x)}{x(\ln x)^2}$$

$$= \frac{1}{x(1-x)(\ln x)^2} (-x \ln x - (1-x) \ln(1-x))$$

2- a)  $\forall t \in ]0; 1[, \text{ on a } t > 0 \text{ et } \ln t < 0$   
Donc  $t \ln t < 0$

b) Lemme  $\forall x \in ]0; 1[, f'(x) = \frac{-x \ln x - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}$

et que  $x(1-x)(\ln x)^2 > 0$  car  $1-x > 0$ ,  
on a  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x \ln x - (1-x) \ln(1-x) > 0$   
Or  $\forall x \in ]0; 1[, x \ln x < 0$  donc  $-x \ln x > 0$   
et comme  $x-1 \in ]0; 1[, -(1-x) \ln(1-x) > 0$   
(d'après question 2a).

Donc  $f'(x) > 0$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$   
 $\forall x \in ]0; 1[$

$$3 - a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0$$

Ponc  $f$  est prolongeable par continuité en  $0$  (car limite finie en  $0$ ). On a  $f(0) = 0$

b)  $\forall x \in ]0; 1[$ ,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}}{x} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \times \frac{1}{x}$$

Or  $\ln(1-x) \sim_{x \rightarrow 0} -x$

$$\text{Ponc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln(x)} = 0$$

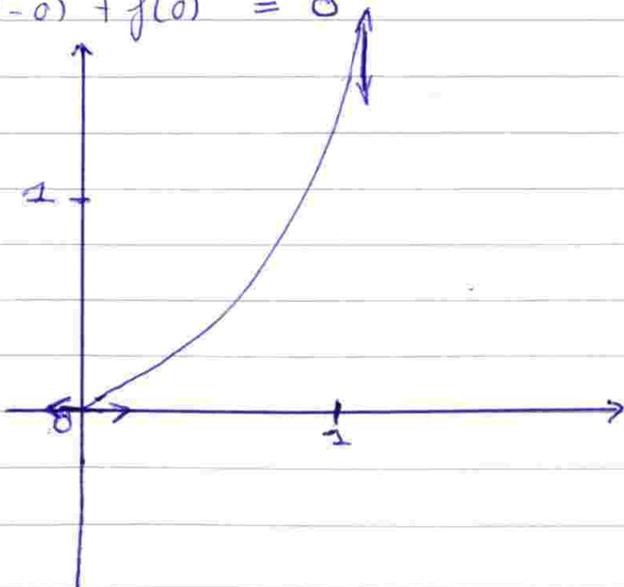
Ponc  $f$  est dérivable en  $0$  et  $f'(0) = 0$ .

$$4 - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty \right] \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = +\infty$$

On en déduit que la courbe représentative de  $f$  possède une asymptote verticale en  $1$ .

5 - La tangente en  $0$  de  $f$  est donnée par l'équation

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0$$



6 - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $j_n(x) = x^n + x - 1$ .  
 $j_n$  est dérivable en tant que fonction polynomiale.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $j_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$  car  $x \geq 0$   
Lonc la fonction  $j_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Lonc comme  $j_n$  est continue (car dérivable) et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $j_n(\mathbb{R}_+)$   
c'est-à-dire dans  $[j_n(0); \lim_{+\infty} j_n] = [-1; +\infty[$ .

Or  $0 \in [-1; +\infty[$ ,

donc l'équation  $x^n + x - 1 = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$  que l'on note  $u_n$ .

7 - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $j_n(0) = -1$ ,  $j_n(u_n) = 0$  (question 6)  
et  $j_n(1) = 1$   
on a alors  $j_n(0) < j_n(u_n) < j_n(1)$

Or comme  $j_n$  est croissante on a  $0 < u_n < 1$ .

8 - On a  $j_2(u_2) = 0$  d'après la question 6.

Lonc  $j_2(u_2) = 0 \Leftrightarrow u_2 + u_2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2u_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow u_2 = \frac{1}{2}$$

Lonc  $u_2 = \frac{1}{2}$ . On a aussi  $j_2(u_2) = 0$

et  $j_2(u_2) = (u_2)^2 + u_2 - 1 = 0$

On cherche à résoudre l'équation  $X^2 + X - 1 = 0$ .

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ . Lonc 2 racines:

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Or  $X_1 < 0$  Lonc  $u_2 = X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

9 - @ fonction  $U = \text{valeur} \approx \text{approche}(n)$

$$a = 0$$

$$b = 1$$

while  $U < 10^{-3}$

$$c = (a+b)/2$$

if  $(c^n + c - 1) > 0$  then

$$a = b$$

else

$$a = c$$

end

$$U = U + 1$$

end

end fonction

⑤ On peut donc conjecturer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante, et qu'elle converge vers 0,35.

10 - @  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , Montrons par récurrence que  $f(u_n) = n$ .

• pour  $n = 1$ ,  $f(u_1) = f(u_2) = f(1/2) = 1$ . On a bien  $f(u_n) = n$  dans ce cas là.

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $f(u_n) = n$  et montrons que  $f(u_{n+1}) = n+1$ .

$$f(u_{n+1}) = \frac{\ln(1 - u_{n+1})}{\ln(u_{n+1})}$$

J'admetts que  $f(u_{n+1}) = n+1$ .

• On en déduit par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(u_n) = n$ .

⑥  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f(u_n) = n$ . Donc  $f(u_{n+1}) = n+1$ .

on a donc  $f(u_n) < f(u_{n+1})$

comme  $f$  est strictement croissante on a  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

⑦  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée (par 1) donc elle converge. Notons l sa limite.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 22

Session : 2020

Épreuve de : Maths

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

① On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = l$  avec  $l \in ]0; +\infty[$ .

Puis comme  $f$  est continue en  $l$ ,  
on a  $f(l) = n \Leftrightarrow \frac{\ln(x-l)}{\ln(n)} = n$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{\ln(x-l)}{\ln(n)}\right) = e^n$$

1.1. ② Comme  $F$  est  $e^2$  sur  $(]0; +\infty[)^2$ , on a  
 $\forall (x, y) \in (]0; +\infty[)^2$ ,

$$d_1(F)(x, y) = 2xy + 2x - 2$$

$$d_2(F)(x, y) = x^2 - y$$

③  $\forall (x, y) \in (]0; +\infty[)^2$ ,

$$\begin{cases} d_1(F)(x, y) = 0 \\ d_2(F)(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 2x - 2 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 2x - 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(xy + x - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Donc  $\forall (x, y) \in ]0, +\infty[{}^2$ ,

$$\begin{cases} d_1(F)(x, y) = 0 \\ d_2(F)(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x - 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = u_3 \\ y = u_3^2 \end{cases}$$

Donc la fonction  $F$  admet  $(u_3, u_3^2)$  comme unique point critique, où le réel  $u_3$  est l'unique solution sur  $\mathbb{R}_+$  de  $(E_3)$ .

12. a) Comme  $F$  est  $C^2$  on a  $\forall (x, y) \in ]0, +\infty[{}^2$ ,

$$d_{1,1}^2(F)(x, y) = 2y + 2$$

$$d_{2,1}^2(F)(x, y) = d_{1,2}^2(F)(x, y) = 2x$$

$$d_{2,2}^2(F)(x, y) = -2$$

$$\text{Donc } H = \begin{pmatrix} 2u_3^2 + 2 & 2u_3 \\ 2u_3 & -2 \end{pmatrix}$$

b)  $\lambda$  est valeur propre de  $H$  si et seulement si  $H - \lambda I$  est non inversible, c'est-à-dire si et seulement si

$$(2u_3^2 + 2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (2u_3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2u_3^2 - 2\lambda u_3^2 - 2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4u_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(-2\lambda u_3^2 - 2) - 6u_3^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

Donc  $H$  admet deux valeurs propres distinctes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

vérifiant  $\lambda_1 \lambda_2 = -6\mu_3^2 - 2$ .

13 - Lemme  $F$  n'a qu'un unique point critique  $(\mu_3, \mu_3^2)$  et que la matrice Hessienne de  $F$  en ce point admet deux valeurs propres distinctes vérifiant  $\lambda_1 \lambda_2 = -6\mu_3^2 - 2 < 0$

On a déduit que les deux valeurs propres sont de signe différents. Donc  $F$  n'a pas d'extrema local en  $(\mu_3; \mu_3^2)$ .

Donc  $F$  n'a pas d'extrema locaux sur  $(]0; +\infty[)^c$ .

Exercice 2:

1- a)  $E = \left\{ M(a, b) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_4(\mathbb{R})$ .

On a  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de

$E$ , libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, est donc une base de  $E$ .

Donc  $\dim E = 2$ .

⑥ Soit  $M \in E$  et  $N \in E$ , telles que  $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = N$

On a alors  $MN \in E$  en tant que produit de matrices de  $E$

2 - Soit  $a=0$  et  $b=0$

On a  $\Pi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . L'unique valeur propre de  $\Pi(0,0)$  est 0 car  $\Pi(0,0)$  est une matrice diagonale.

Il existe donc une matrice  $P$  inversible telle que  $\Pi(0,0) = P \circ X \circ P^{-1} = 0$  donc  $\Pi(0,0)$  est diagonalisable.

3 - Soit  $a \neq 0$  et  $b=0$

$$\textcircled{a} \quad A^2 = \Pi(a,0) \times \Pi(a,0) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = aA$$

Penc Comme  $A^2 = aA \Leftrightarrow A^2 - aA = 0$

on en déduit que  $X^2 - aX$  est polynôme annulateur de  $A$ .

⑥ Comme  $X^2 - aX$  est polynôme annulateur, les valeurs propres possibles de  $A$  sont les racines de ce polynôme.

$$\text{Or } X^2 - aX = 0 \Leftrightarrow X(X - a) = 0 \\ \Leftrightarrow X=0 \text{ ou } X=a$$

$\text{Sp}(A) \subset \{0; a\}$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + ae = 0 \\ ax + ae = 0 \\ ax + ae = 0 \\ ax + ae = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix}$$

$\text{Ker } A = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \neq 0$  donc 0 est

valeur propre de  $A$  et  $E_0(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 22

Session : 2020

Épreuve de : Maths

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$a \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Donc la famille  $\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est libre, c'est

donc une base de  $E_0(A)$  car aussi génératrice de  $E_0(A)$ .

$$\bullet \text{ De plus } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - aI) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae = 0 \\ ax - ay + ae = 0 \\ ax - az + ae = 0 \\ -ae = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = ay \\ ax = az \\ e = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(A - aI)$

Donc  $1 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \neq 0$  donc  $a$  est valeur propre de  $A$ .  
Donc  $E_a(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Et  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $E_a(A)$ , libre car formée d'un vecteur non nul, donc une base de  $E_a(A)$ .

③ D'après la question précédente on a  
 $\dim E_0(A) = 3$  et  $\dim E_a(A) = 1$

donc  $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) = 4$  donc A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice P inversible telle que  
 $A = P D P^{-1}$

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

4 - Soit  $a = 0$  et  $b \neq 0$

$$\textcircled{a} B = M(0, b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \quad \text{Rg}(B) = \dim \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \dim \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \boxed{1}$$

$$\text{et } B - bI_4 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}(B - bI_4) = \dim \left( \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$= \dim \left( \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$= \boxed{3}$$

⑤ Comme  $\text{Rg}(B) + \text{Rg}(B - bI_4) = 4$ , on a déduit que l'ensemble des valeurs propres de B est  $\{0, b\}$ .  
 avec  $\boxed{\dim E_0(B) = 1}$  et  $\boxed{\dim E_b(B) = 3}$ .

③ B est diagonalisable car  $\dim E_0(B) + \dim E_b(B) = 4$   
et que B est une matrice d'ordre 4.

5- Soit  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$

$$\textcircled{a} (x, y, z, e) \in \ker f \Leftrightarrow M(a, b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + ae = 0 \\ bx + by + bz + be = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -e \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e \\ -z \\ z \\ e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponc  $\ker f = \text{vect} \left\{ (-1; 0; 0; 1); (0; -1; 1; 0) \right\}$

avec  $v_3 = (-1; 0; 0; 1)$  et  $v_4 = (0; -1; 1; 0)$

on a  $(v_3; v_4)$  une famille génératrice de  $\ker f$ , libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, donc une base de  $\ker f$ .

$$\underline{\dim \ker f = 2.}$$

④ Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tels que

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(1, 1, 1, 0) + b(0, 0, 0, 1) + c(-1, 0, 0, 1) + d(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ a - d = 0 \\ a + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = d \\ a = -d \\ c = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

Donc la famille  $B'$  est libre, maximale, donc une base de  $\mathbb{R}^4$ .

c) Soit  $N = \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

car  $v_3 \in \text{Ker } f$  et  $v_4 \in \text{Ker } f$  donc  $f(v_3) = 0$  et  $f(v_4) = 0$

et  $\forall (a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 3b \\ 3b \end{pmatrix} \quad a v_2 + 3b v_2 = f(v_2)$

$\forall (a, b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(v_2) = a v_2 + b v_2$

d) Soit  $\lambda \neq 0$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Si  $X$  est un vecteur propre de  $N$  associé à la valeur propre  $\lambda$  on a alors

$NX = \lambda X \quad \text{Or } NX = \begin{pmatrix} ax + ay \\ 3bx + by \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a alors  $\begin{pmatrix} ax + ay \\ 3bx + by \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda t \end{pmatrix}$

Donc on a  $\begin{cases} ax + ay = \lambda x \\ 3bx + by = \lambda y \\ z = t = 0 \end{cases}$

On a alors  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Donc  $X$  est un vecteur propre de  $N$  associé à la valeur propre  $\lambda$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{cases}$

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 22

Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2:6e) Soit  $(a, b) = (1, 1)$ .

$$\text{On a } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda$  est valeur propre de  $T$  si et seulement si  $T - \lambda I$  est non inversible, c'est-à-dire si et seulement si  $(1-\lambda)(1-\lambda) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

On cherche à résoudre  $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ .

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0 \text{ donc 2 racines :}$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Les valeurs propres de  $T$  sont donc  $1 - \sqrt{3}$  et  $1 + \sqrt{3}$ .

Donc d'après la question précédente on a  $1 - \sqrt{3}$  et  $1 + \sqrt{3}$  qui sont des valeurs propres de  $N$ .

Or comme  $N$  est la matrice de  $f$  dans la base  $B'$ , les valeurs propres de  $f$  sont  $1 - \sqrt{3}$  et  $1 + \sqrt{3}$ .

Donc  $M(1, 1)$  a pour valeur propres  $1 - \sqrt{3}$  et  $1 + \sqrt{3}$  (car matrice représentative de  $f$  dans la base  $B$ ).

① avec  $a = 1$  et  $b = -1$ ,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ .

Or  $T - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ .

$\lambda$  est valeur propre de  $T$  si et seulement si  $T - \lambda I$  est non inversible, c'est-à-dire si et seulement si

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -2$$

C'est impossible. Donc  $T$  n'admet pas de valeur propre.

### Exercice 3:

- 1- • si  $x < b$ ,  $f(x) = 0 \geq 0$   
si  $x \geq b$ ,  $f(x) = a \frac{b^a}{x^{a+1}} \geq 0$  car  $a > 0$  et  $b > 0$

Donc  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

- sur  $]-\infty; b[$ ,  $f$  est continue car constante, et sur  $]b; +\infty[$   $f$  est continue par les théorèmes usuels.  
Donc  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en  $b$ .

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_b^{+\infty} a \frac{b^a}{x^{a+1}} dx$$

$$= ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1}} dx$$

$$\text{Soit } A > b, \quad ab^a \int_b^A \frac{1}{x^{a+1}} dx = ab^a \left[ \frac{-1}{ax^a} \right]_b^A$$
$$= ab^a \times \frac{-1}{aA^a} + \frac{ab^a}{ab^a}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

Donc  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^0$  sauf peut-être en  $b$  et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{Donc } f \text{ est une densité de probabilité.}$$

- 2- On a  $X$  admet pour densité  $f$ .  
Donc  $X(\mathbb{R}) = [b; +\infty[$ .

Donc si  $x < b$ ,  $F_X(x) = 0$

$$\text{si } x \geq b, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt + \int_b^x f(t) dt$$
$$= \int_b^x a \frac{b^a}{t^{a+1}} dt$$
$$= ab^a \left[ \frac{-1}{at^a} \right]_b^x$$

Donc si  $x \geq b$ ,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = ab^a \left( \frac{-1}{ax^a} + \frac{1}{ab^a} \right) \\ &= -\frac{ab^a}{ax^a} \\ &= -\left(\frac{b}{x}\right)^a \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} -\left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 - @ Soit  $U \sim U([0, 1[)$

$$U(\mathbb{R}) = [0, 1[ \quad , \quad (U^{-1/a})(\mathbb{R}) = [2; +\infty[$$

$$\text{Donc } (bU^{-1/a})(\mathbb{R}) = [b; +\infty[$$

$$\text{Donc si } x < b, F_{bU^{-1/a}}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{si } x \geq b, F_{bU^{-1/a}}(x) &= P(bU^{-1/a} \leq x) \\ &= P(U^{-1/a} \leq \frac{x}{b}) \quad \text{car } b > 0 \\ &= P(U \leq \left(\frac{b}{x}\right)^a) \\ &= F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \\ &= \left(\frac{b}{x}\right)^a \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_{bU^{-1/a}}(x) = \begin{cases} \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$bU^{-1/a}$  suit la même loi que  $X$ , donc suit la loi de Pareto de paramètre  $a$  et  $b$ .

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 22

Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3. (b) (exercice 3)

$$a > 0 ; b > 0$$

fonction  $X = \text{pareto}(a, b)$ 

$$X = (X/b)^{-3}$$

pdf fonction

c) /

4. a)  $X$  admet une espérance si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  converge absolument ce qui équivaut à  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx$  converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx = \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{x^a} dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$$

car  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$  converge si et seulement si  $a > 1$  (Riemann avec  $\alpha > 1$ )

Donc  $ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$  converge si et seulement si  $a > 1$ .

$X$  admet une espérance si et seulement si  $a > 1$

$$\text{et } E(X) = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } A \geq b, \quad ab^a \int_b^A \frac{1}{x^a} dx &= ab^a \left[ -\frac{1}{(a-1)x^{a-1}} \right]_b^A \\ &= -\frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}} + \frac{ab^a}{(a-1)b^{a-1}} \end{aligned}$$

$$A \rightarrow +\infty \quad \frac{ab}{a-1}$$

Donc  $E(X) = \frac{ab}{a-1}$  (si  $a > 1$ )

⑥  $X$  admet une variance si et seulement si  $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$  converge absolument, ce qui équivaut ici à convergence.

or  $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_b^{+\infty} \frac{a b^a}{x^{a-1}} dx$

or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}} dx$  converge si et seulement si  $a > 2$  (Riemann avec  $\alpha > 1$ )

Donc  $ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}} dx$  converge si et seulement si  $a > 2$ .

$X$  admet une variance si et seulement si  $a > 2$ .

$$E(X^2) = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}} dx$$

or soit  $A > 1$ ,  $ab^a \int_b^A \frac{1}{x^{a-1}} dx = ab^a \left[ \frac{-1}{(a-1)x^{a-1}} \right]_b^A$

$$= \frac{-ab^a}{(a-1)A^{a-1}} + \frac{ab^a}{(a-1)b^{a-1}}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{ab^2}{(a-1)}$$

Donc  $E(X^2) = \frac{ab^2}{(a-1)}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{ab^2}{(a-1)} - \left( \frac{ab}{a-1} \right)^2$$

$$= \frac{ab^2}{a-1} - \frac{a^2 b^2}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{ab^2}{(a-1)(a-1)^2}$$

5 - a)  $\forall x \in [b; +\infty[$ ,

$$P(Y_n > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$$

$$= P(X_1 > x \cap \dots \cap X_n > x)$$

$$= 1 - P(X_1 \leq x \cap \dots \cap X_n \leq x)$$

$$= 1 - (P(X_1 \leq x))^n \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}$$

$$= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}$$

si  $x \geq b$

$$\text{b) donc } P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x)$$

$$= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}$$

$$\text{Or } Y_n(\mathbb{R}) = [b; +\infty[$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc  $Y_n$  suit une loi de Pareto de paramètre 3 et b.

$$\text{c) } b(Y_n) = E(Y_n - b) = E(Y_n) - b$$

$$\text{Or } E(Y_n) = E\left(\frac{3n-2}{3n} Y_1\right) = \frac{3n-2}{3n} E(Y_1)$$

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_b^{+\infty} \frac{3xb^3}{x^4} dx$$

$$= 3b^3 \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$\text{Soit } A > b, \quad 3b^3 \int_b^A \frac{1}{x^3} dx = 3b^3 \left[ \frac{-1}{2x^2} \right]_b^A$$

$$= \frac{-3b^3}{2A^2} + \frac{3b^3}{2b^2}$$

$A \rightarrow +\infty$

$$= \frac{3}{2} b$$

$$\text{Donc } E(Y_n) = \frac{3}{2} \times b$$

$$\text{Donc } E(Y_n') = \frac{3n-2}{3n} \times \frac{3}{2} \times b$$

$$= \frac{3n-2}{2n} \times b$$

$$b(Y_n') = \frac{3n-2}{2n} \times b - b$$

$$= \frac{3bn - b - 2bn}{2n}$$

$$= \frac{bn - b}{2n}$$

$$= \frac{b(n-2)}{2n}$$

∴ j'admets que  $Y_n'$  est un estimateur sans biais de  $b$ .

Le risque quadratique de  $Y_n'$  est donné par

$$r(Y_n') = V(Y_n') = V\left(\frac{3n-2}{3n} Y_n\right)$$

$$= \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^2 V(Y_n)$$

$$V(Y_n) = \frac{3b^2}{2^2} = \frac{3b^2}{4}$$

d'après question 4.6.

$$\text{Donc } r(Y_n') = \frac{(3n-2)^2}{9n^2} \times \frac{3b^2}{4}$$

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 22

Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3 :

$$b-@ \quad Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$\text{Donc } E(Z_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + \dots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n} E(X_1) \times n$$

$$= E(X_1)$$

$$= \boxed{\frac{3b}{2}} \quad \text{d'après question 4. a avec } a=3$$

$$V(Z_n) = \frac{1}{n^2} n V(X_1) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}$$

$$= \frac{1}{n} V(X_1)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{3b^2}{4} \quad \text{d'après question 4. b avec } a=3$$

$$= \boxed{\frac{3b^2}{4n}}$$

⑥

8- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$X_n(\mathbb{R}) = [1; +\infty[ , \text{ donc } \ln(X_n)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

$$\text{si } x < 0, F_{W_n}(x) = 0$$

$$\text{si } x \geq 0, F_{W_n}(x) = P(W_n \leq x)$$

$$= P(\ln(X_n) \leq x)$$

$$= P(X_n \leq e^x) \text{ car } u \mapsto e^u \text{ est strictement croissante.}$$

$$= 1 - \frac{1}{e^{ax}}$$

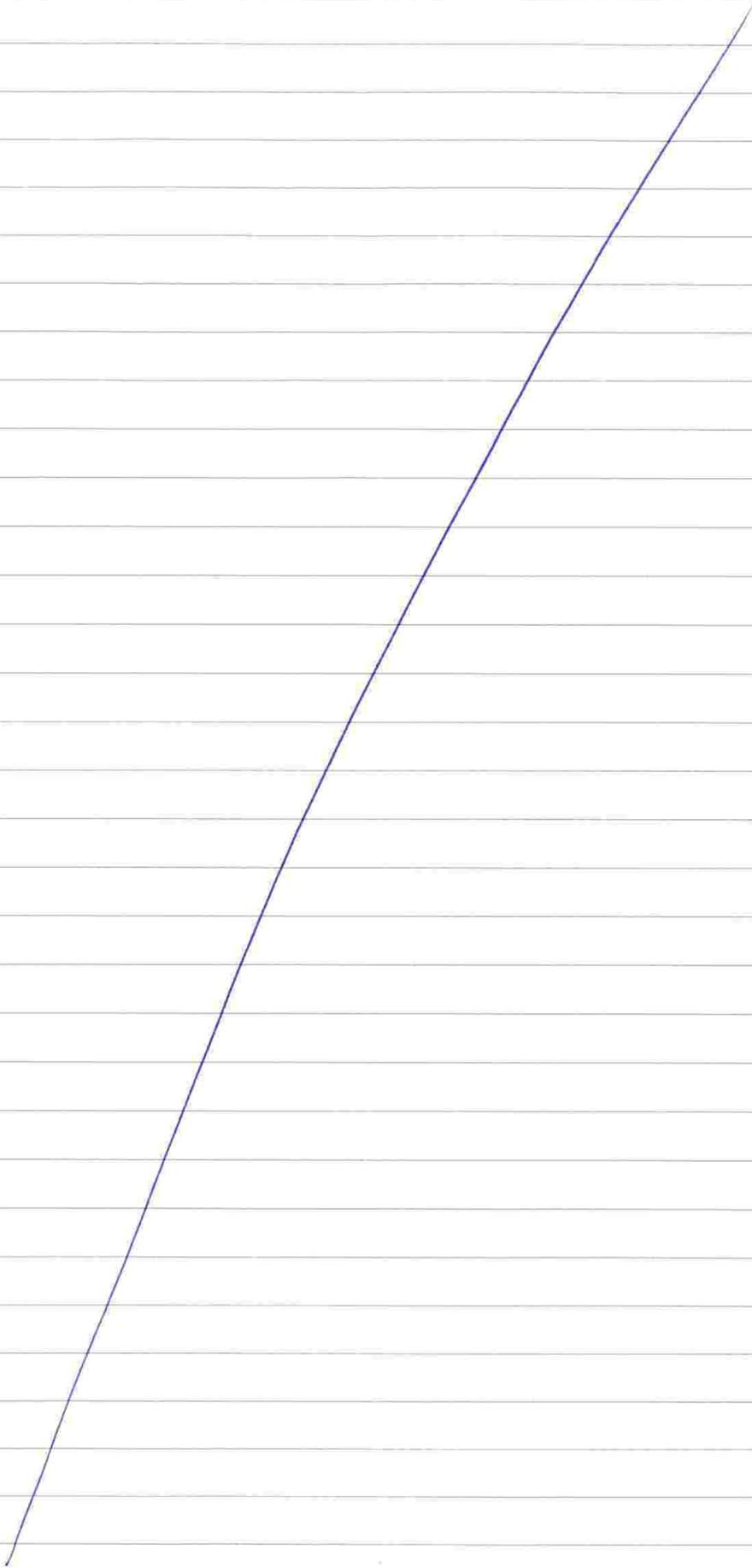
$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_{W_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{W_n \sim \mathcal{E}(a)} \quad E(W_n) = \frac{1}{a} \text{ et } V(W_n) = \frac{1}{a^2}.$$

$$\text{(car si } x \geq 0, F_{X_n}(x) = 1 - \frac{1}{x^a} \text{.)}$$

$$\begin{aligned} 9- \text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_n(a \Gamma_n - 1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\underline{T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{H}(0; 1)}.$$



A single blue diagonal line is drawn across the page, extending from the bottom-left quadrant towards the top-right quadrant.

