Corrigé #2

1) Trouver trois réels α, m, σ que l'on exprimera en fonction de a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

Notons que toute fonction polynômiale du second degré peut s'écrire sous une forme dite "canonique" qui prend la forme :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

À RETENIR

Suivant ce qui précède, on a donc :

$$\alpha = -\frac{\Delta}{4a}, \quad m = -\frac{b}{2a}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

qui vérifient bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c \quad (*)$$

(2) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx$ converge et en donner la valeur.

En composant la relation $(*)$ par la fonction exp il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-(ax^2+bx+c)} = e^{-\alpha} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

En notant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

on peut alors écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-(ax^2+bx+c)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \cdot f(x)$$

Or, f est <u>une</u> densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'où

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Finalement, par linéarité de l'intégrale qui converge on peut écrire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx$

converge et que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$$

On retrouve notamment la célèbre intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$