Corrigé # 4

① À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| \int_a^b f(t) \sin(xt)\, dt \right| \leq \frac{K}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et f sont C^1 sur $[a ; b]$ donc par intégration par parties il vient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_a^b f(t) \sin(xt)\, dt = \left[-f(t) \frac{\cos(xt)}{x} \right]_a^b$$

$$+ \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \cos(xt)\, dt$$

$$= \frac{f(a)\cos(xa) - f(b)\cos(xb)}{x} + \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt.$$

L'inégalité triangulaire nous assure que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt\right| \leq \frac{|f(a)\cos(xa)| + |f(b)\cos(xb)|}{x} + \frac{\left|\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt\right|}{x}$$

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [a;b]$,

$$|\cos(xt)| \leq 1$$

Par conséquent, $\begin{cases} |f(a)\cos(xa)| \leq |f(a)| \\ |f(b)\cos(xb)| \leq |f(b)| \end{cases}$

Et par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b f'(t) \cos(xt)\, dt \right| \leq \int_a^b \left| f'(t) \cos(xt) \right| dt$$

$$\leq \int_a^b \left| f'(t) \right| dt$$

Finalement, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(xt)\, dt \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|}{x}$$

f' est continue sur le segment $[a ; b]$ donc f' est bornée et atteint ses bornes d'où :

$\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [a ; b]$, $|f'(t)| \leq M$.

Les fonctions en présence étant continues sur $[a ; b]$ on a par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt \le \int_a^b M\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt \le M(b-a)$$

Il vient alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\sin(xt)\,dt\right| \le \frac{|\varphi(a)| + |\varphi(b)| + M(b-a)}{x}$$

En posant $K = |\varphi(a)| + |\varphi(b)| + M(b-a)$

il vient :

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(xt)\,dt\right| \le \frac{K}{x}}$$

② En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\int_a^b \ell(t) \sin(xt)\, dt \right) = 0$$

Notons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{K}{x} \right) = 0$ et comme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \left| \int_a^b \ell(t) \sin(xt)\, dt \right|$$

il vient par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \int_a^b \ell(t) \sin(xt)\, dt \right| = 0$$

d'où :

$$\boxed{\lim \left(\int_a^b \ell(t) \sin(xt)\, dt \right) = 0}$$

(Théorème de Riemann - Lebesgue)