Code épreuve : 294	Nombre de pages : 16	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques TBSB

E5-00089
831947
Maths T

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) a. P est une matrice d'ordre 2, donc si $ad-bc \neq 0$ P est inversible.

$ad-bc = 1\times(-1) - 1\times 1 = -2 \neq 0$ donc P est inversible

et $\boxed{P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

b. Posons $Q(X) = X^2 - 2X$ alors $Q(A) = A^2 - 2A$

$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$

$Q(A) = A^2 - 2A$; Or $A^2 - 2A = 0$; Donc $Q(A) = 0$

Comme $Q(A) = 0$ alors $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A.

$Spec(A) \subset Rac(Q)$

$X^2 - 2X = 0$ Donc ou $\boxed{X = 0}$ ou $X - 2 = 0$
$X(X-2) = 0$ $\boxed{X = 2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Les valeurs propres possibles de A sont $\{0.2\}$

c. $AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U$

donc U est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

$AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times V$

donc V est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

d. $P^{-1}AP = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$

$\boxed{\text{Donc } P^{-1}AP = C}$

2) a. $\boxed{B = A + I}$

$\boxed{D = C + I}$

b. $P^{-1}BP = P^{-1} \times (A+I) \times P$ car $B = A + I$

$= P^{-1}AP + P^{-1}IP$ car on développe les matrices

$= C + I$ car $P^{-1}AP = C$ et $P^{-1} \times P = I$

$= D$ car $C + I = D$

$\boxed{P^{-1}BP = D}$

3) a. • <u>Initialisation $n = 0$</u>

$P^{-1}B^0P = P^{-1} \times I \times P = P^{-1} \times P = I$

Or $D^0 = I$ Donc la formule est vraie au rang 0

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $P^{-1}B^nP = D^n$
Montrons alors que $P^{-1}B^{n+1}P = D^{n+1}$

$D^{n+1} = D \times D^n$

$= P^{-1}BP \times D^n$ car $D = P^{-1}BP$

$= P^{-1}BP \times P^{-1}B^nP$ par hypothèse de récurrence

$= P^{-1}B \times I \times B^nP$ car $P \times P^{-1} = I$

$= P^{-1} \times B^{n+1} \times P$ car $B \times B^n = B^{n+1}$

• <u>C</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P^{-1}B^nP = D^n}$

b. La matrice D est une matrice diagonale donc

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c. $D^n = P^{-1}B^nP$ donc $\boxed{B^n = PD^nP^{-1}}$

$$B^n = P \times \begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3^n & -3^n\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3^n-1 & -3^n-1\\ -3^n+1 & -3^n+1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n+1\\ 3^n-1 & 3^n-1\end{pmatrix}}$$

4). a. $a_1 = P(A_1) = \frac{2}{3}$ car c'est Antoine qui a le service lors du 1er échange.

$b_1 = P(B_1) = \frac{1}{3}$

$a_2 = P(A_2) = P_{A_1}(A_2) \times P(A_1) + P_{B_1}(A_2) \times P(B_1)$ (probabilités totales)

$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

$\boxed{a_2 = \frac{5}{9}}$

b. $\boxed{P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}}$

c. $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n)$

$\boxed{a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n}$

$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n)$

$\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n}$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 294	Nombre de pages : 16	Session : 2020
	Épreuve de : Mathématiques T BSB		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3} B X_n = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2a_n + b_n \\ a_n + 2b_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$

$\boxed{\text{donc } X_{n+1} = \frac{1}{3} B X_n}$

e. • <u>Initialisation $n = 1$</u>

$\frac{1}{3^{1-1}} B^{1-1} X_1 = \frac{1}{3^0} B^0 X_1 = \frac{1}{1} I X_1 = X_1$

La formule est vraie au rang 1

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$

Montrons alors que $X_{n+1} = \frac{1}{3^n} B^n X_1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$X_{n+1} = \frac{1}{3} B X_n$ question 4 d.

$= \frac{1}{3} B \times \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$ par hypothèse de récurrence

$= \frac{1}{3^n} \times B^n X_1$ car $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$ et $B \times B^{n-1} = B^n$

• d : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1}$

f. $X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$

$$\frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(3^{n-1}+1) + \frac{1}{3}(3^{n-1}-1) \\ \frac{2}{3}(3^{n-1}-1) + \frac{1}{3}(3^{n-1}+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2 \times 3^n} \\ \frac{2 \times 3^{n-1}}{3^n} \end{pmatrix}$$

Or $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $\boxed{a_n = \frac{3^n+1}{2 \times 3^n}}$

et $\boxed{b_n = \frac{2 \times 3^{n-1}}{3^n}}$

5) a. if a == 1 then a = grand (2/3)
else a = grand (1/3)

b. ② S = 2/3

① S = (3∧n + 1) / (2 * 3∧n)

Exercice 2

$g(x) = x - \ln(x)$

1) a. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

b. $g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0$

$\boxed{g(1) = 1}$

c. $\boxed{\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x - \ln(x) = +\infty}$ car $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x)$: Forme indeterminée $+\infty - \infty$

$g(x) = x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par les croissances comparées.

et $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\boxed{\text{Donc } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

d. $x - 1 = 0$

donc $x = 1$ et $x = 0$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
Signe $g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
Variation $g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

e. $\forall x > 0 \quad g(x) > 0$ car $\forall x > 0 \quad x > 0$ et $\ln(x) > 0$

2) a. $f(x) = \dfrac{1}{x - \ln(x)}$

donc $f'(x) = \dfrac{-(1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln(x))^2} = \cancel{\dfrac{-x+1}{(x - \ln(x))^2}} = \dfrac{-1 + \frac{1}{x}}{(x - \ln(x))^2} = \dfrac{\frac{-x+1}{x}}{(x - \ln(x))^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 - x}{x(x - \ln(x))^2}}$$

b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

Comme la limite en l'infinie est égale à en réel, il y a une asymptote verticale $\boxed{x = 0}$

c. $(x - \ln(x))^2 > 0$ et $x > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ donc f' est du signe de $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation $f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$1 - x = 0$

$-x = -1$

$x = 1$

$f(1) = \dfrac{1}{1 - \ln(1)} = 1$

Code épreuve : 294	**Nombre de pages :** 16	**Session :** 2020

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques TBSB

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3) a. $f(x) = x \iff \frac{1}{x - \ln x} = x \iff \frac{1}{x - \ln x} - x = 0$

$\iff \frac{1}{x - \ln x} + \frac{1}{x} = 0 \iff 1 \times (-x + \ln x) + \frac{1}{x} = 0$

$\iff -x + \ln(x) + \frac{1}{x} = 0 \iff x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$

b. $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$ donc $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{h'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc $x^2 - x + 1$ ne possède pas de Racine

x	0	$+\infty$
Signe $h'(x)$	+	
Variation $h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

d. $h(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$. De plus $h(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, et les limites aux bornes du domaine de définition sont de signe opposés.

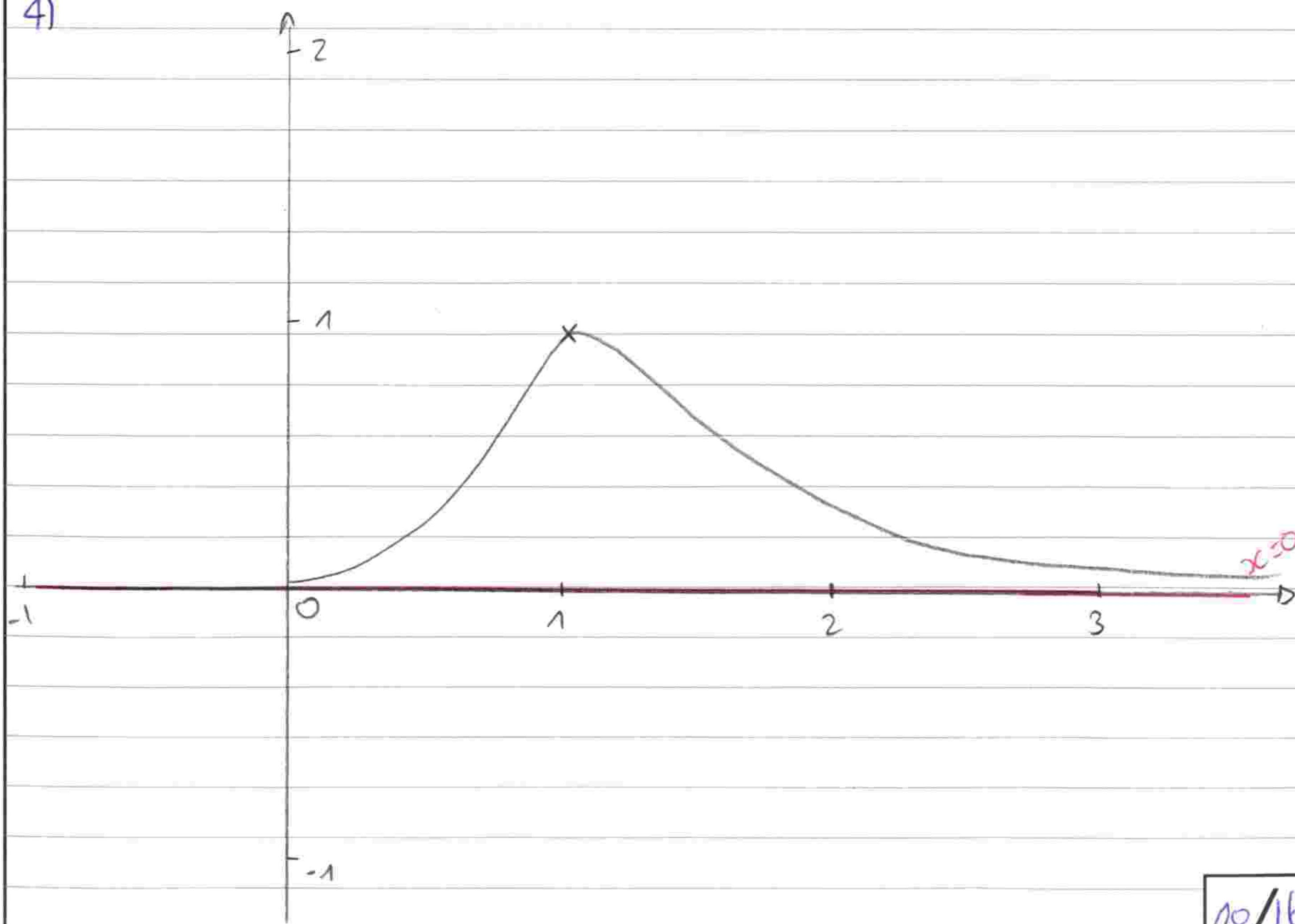
~~Donc d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$ et $f(\alpha)=0$~~

Or $h(x)=0$ équivaut à $f(x)=x$

Donc par le théorème de la bijection l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$ et $f(\alpha)=\alpha$

$f(1)=1$ donc $\alpha=1$

4)



Exercice 3

1) a. Soit e l'expérience "fabriquer des cartouches d'imprimantes"
Soit S l'évènement succès "la cartouche est défectueuse" avec comme probabilité $P(S) = \frac{2}{100}$
On répète 100 fois l'expérience e de Bernoulli dans des conditions identiques et indépendantes.
X compte le nombre de réalisation de l'évènement succès
donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $n=100$ et $p=\frac{2}{100}$
i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{2}{100})$

donc $X(\Omega) = [\![0, 100]\!]$ $\qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

donc $P(X=k) = \binom{100}{k} \left(\frac{2}{100}\right)^k \times \left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}$

b. $E(X) = np = 100 \times \frac{2}{100} = 2$ $\qquad E(X) = 2$

$V(X) = npq = 2 \times \frac{98}{100} = \frac{98}{50} = \frac{49}{25}$ $\qquad V(X) = \frac{49}{25}$

c.
```
X = grand(1,1,'bin',100,0.2)
  if X==0 then Y = X
          else Y = max(X)
  end
  disp(X), dis(Y)
```

2) a. $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc $E(X_i) = p$ $\qquad V(X_i) = pq$

b. $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de la variance

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X)$ car indépendance

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{1}{n} \times p \times n$

$E(M_n) = p$

11/16

$b_p(M_n) = E(M_n) - p$
$= p - p = 0$

$b_p(M_n) = 0$ donc M_n est un estimateur sans biais de p.

c. $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} pq$

$= \frac{1}{n^2} \times pq \times n$

$V(M_n) = \frac{pq}{n}$

$r_p(M_n) = b_p(M_n)^2 + V(M_n) = 0 + \frac{pq}{n}$ Or $q = 1-p$

Donc $r_p(M_n) = \frac{p \times (1-p)}{n}$

$r_p(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$

d. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

donc $P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$

$P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq$ ___

Code épreuve : 294	**Nombre de pages :** 16	**Session :** 2020

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques T BSB

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 4

1) a. $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1\times(1+t) - 1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$

$$\boxed{\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}}$$

b. $I_1 = \int_0^1 \frac{t^1}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^1$

$= 1 - \ln(2) - (0 - \ln(1))$ car $\ln(1) = 0$

$$\boxed{I_1 = 1 - \ln(2)}$$

c. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t}\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$= \int_0^1 \frac{t^n(t+1)}{1+t}\,dt$

$= \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$$

$$\boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}}$$

d: $I_2 = \frac{1}{2} - I_1$

$= \frac{1}{2} - (1 - \ln(2)$

$$\boxed{I_2 = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

$I_3 = \frac{1}{3} - I_2$

$= \frac{1}{3} - (\ln(2) - \frac{1}{2})$

$$\boxed{I_3 = \frac{5}{6} - \ln(2)}$$

2) $\int_0^1 k \times \frac{t}{1+t} = 1$ pour que f puisse être une densité de probabilité

Donc $\int_0^1 k \times (1 - \frac{1}{t+1})\, dt = 1$

$k \times [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1$

$k \times (1 - \ln(2)) = 1$

donc $\boxed{k = \frac{1}{1 - \ln(2)}}$

- $t > 0$ sur $[0,1]$ et $1+t > 0$ sur $[0,1]$
et $0 \geq 0$
donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} 0 = 0$ et $f(0) = 0$

$\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{1-\ln(2)} \times \frac{t}{1+t} = 0$ et $f(0) = 0$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{1-\ln(2)} \times \frac{t}{1+t}\,dt = 1$

donc f est une densité de probabilité

3) a. Quand $x < 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0$

Quand $x > 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} 0\,dt = 0$

b. Quand $x \in [0;1]$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \cancel{\frac{1}{1-\ln(2)}}\, k \times \frac{t}{1+t}\,dt$

$$F(x) = \int_{0}^{x} k \times \frac{t}{1+t}\,dt = \int_{0}^{x} k \times \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= k\left[t - \ln(1+t)\right]_0^x = k \times (x - \ln(1+x))$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ k \times (x - \ln(1+x)) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

4) a. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\, dt$ $= \int_{-\infty}^{0} t \times 0\, dt + \int_{0}^{1} k \times t \times \frac{t}{1+t}\, dt + \int_{1}^{+\infty} t \times 0\, dt$

$= \int_{0}^{1} k \times \frac{t^2}{1+t}\, dt = k \times I_2$

Or $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$ et $I_2 = \ln(2) - \frac{1}{2}$

donc $\boxed{E(X) = \frac{\ln(2)-\frac{1}{2}}{1-\ln(2)}}$

b. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\, dt + \int_{0}^{1} t^2 \times k \times \frac{t}{1+t}\, dt + \int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$

$= \int_{0}^{1} k \times \frac{t^3}{1+t}\, dt = k \times I_3$

Or $I_3 = \frac{5}{6} - \ln(2)$

donc $\boxed{E(X^2) = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1-\ln(2)}}$

D'après la formule de Koëning Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

donc $\boxed{V(X) = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1-\ln(2)} - \left(\frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1-\ln(2)}\right)^2}$