Une semaine, un classique #8

D'après EMLYON 2016

Théorème des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, positive et de limite nulle.
Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Exercice 1

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire la convergence de ces suites.

Exercice 2 (*lemme*)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque.
Montrer que si les deux suites extraites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée l, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge. On note S sa somme.

Exercice 3

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$

Notons $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le reste d'ordre n associé à la série, définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

Exercice 4

En déduire, d'après le résultat de la question précédente, que :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\,R_n\,| \leq u_{n+1}$