Corrigé # 8

1 Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire la convergence de ces suites.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

• $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+3}$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} \geqslant 0$$

Ainsi $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n}$

$= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$

Ainsi $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n}$

$= - u_{2n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_{2n+1}) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$

Ces trois points nous permettent d'affirmer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite.

② Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Lemme : Montrer que si les suites extraites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

En déduire que $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

Supposons que les suites extraites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.

On a, par définition :

. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |v_{2n} - \ell| < \varepsilon$

. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |v_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

Ainsi, $\forall n \geqslant \max(2n_0, 2n_1 + 1)$,

$$|v_n - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui traduit bien que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Le premier exercice nous permet alors d'écrire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge

d'où $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge et

notons S sa somme.

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$.

La suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

et converge vers S tandis que la

suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers S, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

---

4) En déduire, d'après le résultat de la question précédente, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq u_{n+1}$$

Pour montrer ce résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer le résultat pour tout les entiers pairs puis impairs.

• On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$

$= S - S_{2n}$

Ainsi, grâce à la question précédente, il vient :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_{2n}| = |S - S_{2n}|$

$= S_{2n} - S$

$\leq S_{2n} - S_{2n+1}$

$\leq u_{2n+1}$.

• Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}|$

$= S - S_{2n+1}$

$\leq S_{2n+2} - S_{2n+1}$

$\leq u_{2n+2}$

Par conséquent, on peut écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq u_{n+1}$$