Une semaine, un classique #6

D'après Maths HEC I 2019

Matrice de Gram & Décomposition polaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1

On considère ici que *A* est une matrice symétrique réelle.

a) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+$ - l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont la forme quadratique associée est positive sur $\mathbb{R}^n$) – si et seulement si les valeurs propres de A sont positives.

b) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ - l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont la forme quadratique associée est strictement positive sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$) – si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 2

Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tMM$

(A est la matrice de Gram associée à M)

Dans tout le reste du problème, il convient de noter que $\boldsymbol{M} \in \mathbf{GL}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{R})$

Exercice 3

Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ vérifiant ${}^{t}MM = S^2$

Exercice 4

Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω telle que $M = \Omega S$ (décomposition polaire).