



Une semaine, un classique #7

D'après Maths HEC I 2013

Existence de valeurs propres pour une matrice complexe

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Exercice 1

Prouver, grâce à la définition d'une famille liée, que A admet un polynôme annulateur non constant noté P .

Exercice 2

En utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss, trouver une forme factorisée du polynôme P et en déduire la relation suivante :

$$\prod_{i=1}^p (A - \lambda_i I)^{\alpha_i} = 0$$

où $p \geq 1$, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{C}^p$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p} \in (\mathbb{N}^*)^p$

Exercice 3

En raisonnant par l'absurde, en déduire que A admet au moins une valeur propre complexe. Que peut-on en conclure ?