Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 19 | Session : 2020

Épreuve de : Maths E HEC/ESSEC

W5-00237 079702 Maths E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I- Deux résultats généraux.

1. a) Y est à valeurs positives.

D'où pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \leq y$,

$[Y \leq x] \subset [Y \leq y]$

$\Rightarrow [X \leq Y] \cap [Y \leq x] \subset [X \leq Y] \cap [Y \leq x]$

$\Rightarrow P([X \leq Y] \cap [Y \leq x]) \leq P([X \leq Y] \cap [Y \leq x])$

$\Rightarrow H(x) \leq H(y)$.

D'où $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $x \leq y \Rightarrow H(x) \leq H(y)$

D'où H est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $H(x) \in [0;1]$ car $0 \leq P([X \leq Y] \cap [Y \leq x]) \leq P([Y \leq x]) \leq 1$.

H est croissante.

D'où ~~H~~ admet bien une limite en $+\infty$.

1. b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n) = P([X \leq Y] \cap [Y \leq n])$

$\lim\limits_{n \to +\infty} P([X \leq Y] \cap [Y \leq n])$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} P([Y \leq n]) P_{[Y \leq n]}([X \leq Y])$

$= 1 \times P([X \leq Y])$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} P([Y \leq n]) = 1$

Or pour tout $x \in [n-1;n]$, $P([X \leq Y] \cap [Y \leq n-1]) \leq P([X \leq Y] \cap [Y \leq x]) \leq P([X \leq Y] \cap [Y \leq n])$

D'où par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} P([X \leq Y] \cap [Y \leq x]) = P([X \leq Y])$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$H(0) = P([X \leq Y] \cap [Y \leq 0])$
$= 0$ car $[X \leq Y] \cap [Y \leq 0] = \emptyset$ car $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

D'où $H(0) = 0$.

2\. a) Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $u < v$.

$H(v) - H(u)$
$= P([X \leq Y] \cap [Y \leq v]) - P([X \leq Y] \cap [Y \leq u])$
$= P([X \leq Y]) \left(P_{[X \leq Y]}(Y \leq v) - P_{[X \leq Y]}(Y \leq u) \right)$ d'après la formule des probabilités composées
$= P([X \leq Y]) \left(P_{[X \leq Y]}([u < Y \leq v]) \right)$
$= P([X \leq Y] \cap [u < Y \leq v])$

Conclusion : $H(v) - H(u) = P([X \leq Y] \cap [u < Y \leq v])$ pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$u < v$ et $u < Y \leq v$.

D'où $[X \leq u] \cap [u < Y \leq v] \subset [X \leq Y] \cap [u < Y \leq v] \subset [X \leq v] \cap [u < Y \leq v]$

D'où $P([X \leq u]) P([u < Y \leq v]) \leq H(v) - H(u) \leq P([X \leq v]) P([u < Y \leq v])$
par indépendance — d'après l'égalité ci-dessus — par indépendance

D'où $F_X(u) \left(F_Y(v) - F_Y(u) \right) \leq H(v) - H(u) \leq F_X(v) \left(F_Y(v) - F_Y(u) \right)$

D'où $F_X(u) \dfrac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v - u} \leq \dfrac{H(v) - H(u)}{v - u} \leq F_X(v) \dfrac{\left(F_Y(v) - F_Y(u) \right)}{v - u}$

car $v \neq u$

Conclusion : $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $u < v$ alors

$$F_X(u) \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v - u} \leq \frac{H(v) - H(u)}{v - u} \leq F_X(v) \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v - u}$$

2. b) On reconnait la formule du taux d'accroissement.

Comme F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vaut f_Y, alors par théorème d'encadrement, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{v \to u} \frac{H(v) - H(u)}{v - u} \text{ existe et vaut } \lim_{v \to u} F_X(v) \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v - u} = F_X(u) F_Y'(u).$$

Conclusion: H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $H'(x) = F_X(x) f_Y(x)$.

2. c) D'après le théorème fondamental de l'intégration,

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $H'(t) = F_X(t) f_Y(t)$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x H'(t)\,dt = \int_0^x F_X(t) f_Y(t)\,dt$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $H(x) = \int_0^x F_X(t) f_Y(t)\,dt$ car $H(0) = 0$.

3. D'après la question 1. b), $\lim_{x \to +\infty} H(x) = P([X \leq Y])$.

D'où d'après la continuité de $f_Y F_X$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$P([X \leq Y]) = \lim_{x \to +\infty} H(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x F_X(t) f_Y(t)\,dt$$

Conclusion: $P([X \leq Y]) = \int_0^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$.

($0 \leq \int_0^x F_X(t) f_Y(t)\,dt \leq \int_0^x f_Y(t)\,dt \Rightarrow 0 \leq \int_0^x F_X(t) f_Y(t)\,dt \leq 1$ et donc $\int_0^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$ converge bien).

4. D'après les résultats que nous donne l'énoncé

$$\begin{aligned} P([X = Y]) &= P([X \leq Y]) - P([X < Y]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion: $P([X = Y]) = 0$.

5. $U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$; $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ et U et V sont indépendantes.
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+$.

a) Pour tout $x \in]-\infty ; -\theta]$, $F_X(x) = 0$ car $(U-\theta)(\Omega) = [-\theta ; +\infty[$.

Pour tout $x \in [-\theta ; +\infty[$,

$$P([X \leq x]) = P(U \leq x + \theta)$$

$$= 1 - e^{-\lambda(x+\theta)}$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ 1 - e^{-\lambda(x+\theta)} & \text{si } x \geq -\theta. \end{cases}$

5. b) Par continuité de $t \mapsto F_X(t) f_Y(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $M > 0$.

$$\int_0^M F_X(t) f_Y(t)\,dt = \int_0^M \mu e^{-\mu t}(1 - e^{-\lambda(t+\theta)})\,dt$$

$$= \int_0^M \mu e^{-\mu t}\,dt - \int_0^M e^{-(\lambda+\mu)t} e^{-\lambda\theta}\,dt \quad \text{par linéarité}$$

Or $\int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t}\,dt = 1$ et $\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Donc d'après qu. 3, $P([U - \theta \leq V]) = \int_0^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t}\,dt - e^{-\lambda\theta} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t}\,dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda\theta} \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Conclusion: $P([U - \theta \leq V]) = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda\theta}$

6. a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$.

Initialisation. $P\left(\bigcup_{k=1}^{1} B_1\right) = P(B_1) \leq \sum_{k=1}^{1} P(B_k)$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Code épreuve : 288	**Nombre de pages :** 19	**Session :** 2020

Épreuve de : Maths E HEC/ESSEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup B_{n+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1}) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1}\right)$$ selon la formule du crible de Poincaré

Or, par hypothèse de récurrence,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1}) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1}\right)$$

et comme $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1}\right) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n+1} P(B_k) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k)$

Conclusion : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k)$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$.

6. b) Supposons que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$$ par passage à la limite et convergence

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k\geq 1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k).$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie II - Une compétition entre deux groupes.

7. a) $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est le temps mis par le groupe A pour résoudre les n premiers problèmes.

7. b)
$Y_1 = 2$ et $X_1 = 5$. D'où $M_1 = 0$.
$Y_2 = 2$ et $X_1 = 5$. D'où $M_2 = 0$.
$Y_3 = 4$ et $X_2 = 2$. D'où $M_3 = 1$
$Y_3 = 4$ et $X_3 = 3$. D'où $M_4 = 0$.
$Y_4 = 2$ et $X_3 = 3$ D'où $M_5 = 1$ car on place A en tête selon l'énoncé en cas d'égalité
$Y_4 = 2$ et $X_3 = 3$. D'où $M_6 = 0$.
$Y_4 = 2$ et $X_4 = 2$. D'où $M_7 = 1$.

7. c)
```
for k= 1: n
    if somme X == mini
        M(k) = 1
    somme X= somme X + grand(1, 1, "exp", 1/p)
  else
      somme Y= somme Y + grand(1, 1, "exp", 1/q)
   end
 mini= min(somme X, somme Y)
end
disp(M)
```

7. d)
```
    S = 0...
  if somme X == mini
    M(K)= ...
     S = S+1
```

8. a) $[U_1 = 1]$ signifie que le premier problème a été plus rapidement résolu par A que par B, autrement dit, que $[X_1 \leq Y_1]$.

De plus, $P([X_1 \leq Y_1]) = 1 - q$ d'après 5. b) avec $\theta = 0$
$= p$.

Conclusion : $P([U_1 = 1]) = P([X_1 \leq Y_1]) = p$.

8. b) i) Soit $x < 0$. Supposons que $[U_1 = 1]$ est réalisé.

$[U_1 = 1]$ est réalisé. D'où $[X_1 \leq Y_1]$ est réalisé.
D'où $[Y_1 - X_1 \leq x] = \emptyset$ pour tout $x < 0$.
D'où $P_{[U_1=1]}([Y_1 - X_1 \leq x]) = 0$.

8. b) ii) Soit $x \geq 0$.

$P_{[U_1=1]}([Y_1 - X_1 \leq x])$

$= \dfrac{P([U_1 = 1] \cap [Y_1 - X_1 \leq x])}{P([U_1 = 1])}$ selon la formule des probabilités conditionnelles

$= \dfrac{1}{p} P([X_1 \leq Y_1] \cap [Y_1 - X_1 \leq x])$ car $P([U_1 = 1]) = p$

$= \dfrac{1}{p} P([X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x])$

Conclusion : $\forall x \geq 0$, $P_{[U_1=1]}([Y_1 - X_1 \leq x]) = \dfrac{1}{p} P([X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x])$

D'où $P_{[U_1=1]}([Y_1 - X_1 \leq x])$

$= \dfrac{1}{p} P([X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x])$

$= \dfrac{1}{p} [\cdot P([Y_1 \leq X_1 + x]) - P([X_1 \leq Y_1]) \ldots]$

$= +1 - e^{-px}$ d'après la question 5. d) avec $\theta = x \geq 0$.

Son paramètre est donc p.

Par analogie, la loi conditionnelle de $X_1 - Y_1$ sachant $[M_1 = 0]$ suivra une loi exponentielle de paramètre q car l'on recommence la même démonstration avec les évènements contraires.

8. d) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([M_n = 1]) = p$.

$$P_{[U_1=1]}([M_{n+1} = 1]) = \frac{P([M_1=1] \cap [M_{n+1}=1])}{P([U_1=1])}$$
$$= P_{[U_1=1]}([X_{n+1} \leq Y_{n+1}])$$

On admet la relation.

8. e) $\{M_n = 1 ; M_n = 0\}$ sont un sce de probabilités nonnulles.
D'où d'après la formule des probabilités totales associée à ce sce,

$$P([M_{n+1} = 1]) = P([M_n = 0] \cap [M_{n+1} = 1]) + P([M_n = 1] \cap [M_{n+1} = 1])$$
$$= P([M_n = 0]) P_{[M_n=0]}([M_{n+1} = 1]) + P([M_n = 1]) P_{[M_n=1]}(M_{n+1} = 1)$$
$$= p(q+p) \quad \text{d'après les résultats précédents}$$
$$= p.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P([M_n = 1]) = p$.

9. D'après la mutuelle indépendance des $(M_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et comme pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $M_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors d'après la stabilité de la loi binomiale, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.

Soit $r \in \mathbb{N}$.

10. a) Pour $n = 0$, on a $r = 0$ et A et B ont le même nombre de problèmes résolus (0).
D'où $a_0 = 1$.

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 19	Session : 2020

Épreuve de : Maths E HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10. b) Pour tout $r \geq 1$,

$[A_r]$ sachant $[U_1 = 1]$ signifie qu'il existe $n \geq r$ tel que pour n problèmes résolus, A en a résolu r de plus que le groupe B ; sachant qu'elle a résolu le premier plus rapidement.

D'où comme A a déjà résolu le premier plus rapidement, il faut seulement trouver $n \geq r-1$ tel que pour n problèmes résolus, A en a résolu $r-1$ de plus que B.

D'où $P_{[U_1=1]}(A_r) = P(A_{r-1})$.

Pour $P_{[U_1=0]}(A_r)$, le raisonnement est le même, sauf que c'est B qui a résolu le premier problème plus rapidement. Il faut donc trouver $n \geq r+1$ pour que A en ait r de plus que B.

D'où $P_{[U_1=0]}(A_r) = P(A_{r+1})$.

10. c) Pour tout $r \geq 1$, comme $\{U_1 = 1 ; U_1 = 0\}$ est un sce de probabilités non nulles, alors :

$P(A_{r+1}) = P_{[U_1=0]}(A_r)$

$\iff P(A_{r+1}) = \dfrac{1}{P(U_1=0)} \times (P(A_r) - P(U_1=1 \cap A_r))$ car $P(A_r) = P(U_1=0 \cap A_r) + P(U_1=1 \cap A_r)$

$= \dfrac{1}{P(U_1=0)} \times P(A_r) - \dfrac{P(U_1=1)P_{[U_1=1]}(A_r)}{P(U_1=0)}$

$\iff P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{q} P(A_n) - \dfrac{P(U_n=1)\, P(A_{n-1})}{q}$ car $U_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$= \dfrac{1}{q} a_n - \dfrac{p}{q} a_{n-1}$

Conclusion : $\forall n \geq 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{q} + \dfrac{p}{q} a_{n-1}$

10. d) $(1-2p)^2 = 1 - 2p + 4p^2$

$= 1 - 2p + 4(1-q)^2$

$= 1 - 2p + 4 - 8q + q^2$

$= 1 - 4p(1-p)$

$= 1 - 4pq.$

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Equation caractéristique de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 = \dfrac{1}{q} x - \dfrac{p}{q}$

$\iff x^2 - \dfrac{1}{q} x + \dfrac{p}{q} = 0.$

$\iff qx^2 - x + p = 0$

$\cancel{\Delta = \dfrac{1}{q^2} - 4\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{1}{q} - 4p\right)}$

$\Delta = 1 - 4pq = (1-2p)^2 > 0.$

D'où il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_n = x_1^n \lambda_1 + x_2^n \lambda_2$

$x_1 = \dfrac{2p}{2q} = \dfrac{p}{q}$ et $x_2 = \dfrac{2-2p}{2q} = 1$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = a_0 \\ r_1 \frac{p}{q} + r_2 = a_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r_1 = 1 - r_2 \quad \text{car } a_0 = 1 \\ r_1 \frac{p}{q} + r_2 = a_1. \end{cases}$$

Conclusion : $\forall r \in \mathbb{N}$, $a_r = \left(\frac{p}{q}\right)^r r_1 + r_2$ où $(r_1, r_2) \in (\mathbb{R}^2)$.

11. Supposons que $p = 1/2$.

Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, $a_r = r_1 + r_2$ car $\left(\frac{p}{q}\right)^r = 1$

$= 1$ car $r_1 = 1 - r_2$.

Soit $p > 1/2$. ~~Montrons par récurrence double q~~

$$\begin{aligned}
& p > 1/2 \\
\Rightarrow\ & 1 - p < 1/2 \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{q} > 2 \quad \text{car } q \neq 0. \\
\Rightarrow\ & \frac{p}{q} > 1 \quad \text{car } p > 1/2 \\
\Rightarrow\ & \left(\frac{p}{q}\right)^r > 1 \quad \text{car } x \mapsto x^r \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
\Rightarrow\ & \left(\frac{p}{q}\right)^r r_1 + r_2 > r_1 + r_2 \quad \text{car } r_1 > 0 \\
\Rightarrow\ & a_r > 1 \quad \text{car } r_1 + r_2 = 1.
\end{aligned}$$

Ce résultat est absurde car $a_r \leq 1$.

On admet que $\forall r \in \mathbb{N}$, $a_r = 1$.

12. Soit $p < 1/2$.

a) Soit $K \in \mathbb{N}$.

i) $A_{2K} =$ [Il existe $n \geq 2K$ tel que pour n problèmes résolus, A en a $2K$ de plus que B]

Or, $[S_{2i} = i + K] =$ ["Parmi les problèmes, $i+K$ sont résolus par A].

Or pour tout $i \geq k$, $2i \geq i+k \geq 2k$.

D'où $\bigcup_{i \geq k} [S_{2i} = i+k] = [$ Pour tout $i \geq k$, il existe $2i$ problèmes résolus et A en a résolu $i+k]$

$= [$ Il existe un entier $n \geq i+k \geq 2k$ tel que pour n problèmes résolus, A en a résolu $2k]$ avec $n = 2i$

Conclusion: $A_{2k} = \bigcup_{i \geq k} [S_{2i} = i+k]$.

12. a) ii) $S_{2i} \hookrightarrow \mathcal{B}(2i ; p)$. d'après 9.

D'où pour tout $i \geq k$, $i+k \in [\![0 ; 2i]\!]$ et,

$$P(S_{2i} = i+k) = \binom{2i}{i+k} p^{i+k} q^{i-k}$$

12. a) iii) D'après le binôme de Newton,

$$\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} = \sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} 1^j (1)^{2i-j}$$

$$= 2^{2i}$$

~~Pour tout $i \geq k$, $4^i = (2+2)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} 2^j 2^{i-j}$~~

Pour tout $i \geq k$, $i+k \in [\![i ; 2i]\!]$.

D'où on a $\sum_{j \in [\![0;2i]\!] \setminus \{i+k\}} \binom{2i}{j} + \binom{2i}{i+k} \geq \binom{2i}{i+k}$ car $\binom{2i}{j} > 0$ pour $j \in [\![0 ; 2i]\!]$

D'où $\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} \geq \binom{2i}{i+k}$

D'où $4^i \geq \binom{2i}{i+k}$ car $\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} = 2^{2i} = 4^i$

Conclusion: $\forall i \geq k$, $4^i \geq \binom{2i}{i+k}$

Code épreuve : 288 | **Nombre de pages :** 19 | **Session :** 2020

Épreuve de : Maths E HEC/ESSEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

12. a) iv) Pour tout $i \geq k$,

$\binom{2i}{i+k} \leq 4^i$

$\Rightarrow \binom{2i}{i+k} p^{i+k} q^{i-k} \leq 4^i p^{i+k} q^{i-k}$

$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=k}^{n} P([S_{2i}=k+i]) \leq \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k (4pq)^i$ avec $n \geq i$.

Or, $\sum_{i=k}^{+\infty} P([S_{2i}=k+i])$ converge car :

- $\sum_{i \geq k} \left(\frac{p}{q}\right)^k (4pq)^i$ est une série géométrique vers $\frac{(4pq)^k}{1-4pq} \times \left(\frac{p}{q}\right)^k$

car comme $|p|<1/2$, alors $|4pq|<1$.

- Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{i=k}^{+\infty} P([S_{2i}=k+i])$ converge.

Conclusion: $0 \leq \sum_{i=k}^{+\infty} P([S_{2i}=k+i]) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{(4pq)^k}{1-4pq}$

12. b) D'après l'inégalité de Boole avec $A_{2k} = \bigcup_{i \geq k} [S_{2i}=i+k]$,

alors $0 \leq a_{2k} \leq \sum_{i=k}^{+\infty} P([S_{2i}=k+i]) \leq \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^k (4pq)^k}{1-4pq}$ d'après 12.a)iv)

Or, $\left(\frac{p}{q}\right)^k (4pq)^k = (4p^2)^k < 1$ car $p<1/2$.

D'où $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^k (4pq)^k = 0$.

D'où d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 0$.

12.c) D'après la question 10.d),

$\lim_{k\to+\infty} A_{2k} = 0$ pour $p < 1/2$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{2k} r_1 + r_2 = 0$

$\Rightarrow r_2 = 0$ car $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{2k} r_1 = 0$.

Or $r_1 = 1 - r_2$. D'où pour tout $r \in \mathbb{N}$, $a_r = \left(\frac{p}{q}\right)^r$

Partie III -

13. a) Soit $K \in \mathbb{N}$.

$[T_n = K]$ = [" K problèmes ont été résolu par A sachant que Q_n a été résolu "]
= [" K problèmes ont été résolus par A parmi $n+K$ problèmes résolus sachant que Q_n et donc que $Q_{n-1}, \dots, Q_1$ ont été résolus "]
= [" K problèmes ont été résolu par A parmi $n+K-1$ problèmes et le $n+K$-ième a été résolu par B "]
$= [S_{n+K-1} = K] \cap [M_{n+K} = 0]$. pour que le processus cesse.

Conclusion : $\forall K \in \mathbb{N}$, $[T_n = K] = [S_{n+K-1} = K] \cap [M_{n+K} = 0]$.

13. b) D'où pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$P([T_n = K]) = P([S_{n+K-1} = K] \cap [M_{n+K} = 0])$
$= P([S_{n+K-1} = K])\, P(M_{n+K} = 0)$ par indépendance des M_i et le lemme des coalitions
$= \binom{n+K-1}{K} p^K q^{n-1} \times q$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(T_n = k) = \binom{n+k-1}{k} p^k q^n$

14. a) Soit le sce $\{A_r,\ r \in [\![1;n+1]\!]\}$ de probabilités non nulles.

G_n est réalisé soit si $T_n \geq n+1$ car dans ce cas le nombre de problèmes résolus par A depuis le début est plus grand que B ; soit si on a le nombre T_n qui surpasse le nombre de problèmes résolus par B entre 0 et n problèmes, c'est à dire si $T_n = k$, alors il doit exister un entier $r \geq n+1-k$ tel que A a résolu $n+1-k$ problèmes de plus que B.

Ainsi, $P(G_n) = P(T_n \geq n+1) + \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k) P(A_{n+1-k})$ par incompatibilité.

14. b) Pour $p \geq 1/2$, $a_{n+1-k} = 1$.

D'où $P(G_n) = P(T_n \geq n+1) + \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k)$

$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T_n = k) + \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_n = k)$

$= 1$ car $T_n(\Omega) = \mathbb{N}$.

14. c) Pour $p < 1/2$, d'après les questions précédentes,

$P(G_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T_n = k) + \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} P(T_n = k)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k) + \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k) a_{n+1-k}$ car $\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T_n = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n} P(T_n = k)(1 - a_{n+1-k})$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} p^k q^n \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n+1-k}\right)$ car $p < 1/2$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} (p^k q^n - p^{n+1} q^{k-1})$

15. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$1 - M_n(p) + \frac{p}{q} M_n(q)$

$= 1 - q^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} p^k + \frac{p}{q} \times p^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{k} q^k$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} (p^k q^n - p^{n+1} q^{k-1})$ en groupant les sommes et factorisant

$= P(G_n)$

Conclusion : $P(G_n) = 1 - M_n(p) + \frac{p}{q} M_n(q)$.

15. b) Soit $x \in [0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

• $M_{n+1}(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} x^k$

• $M_n(x) + (1-x)^n x^{n+1} \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} x \right)$

$= (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k + x^{n+1} \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} x \right) \right)$

$\cancel{= (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k + x^{n+1} \binom{2n}{n+1} - x \sum_{k=0}^{n+1} \right.}$ d'après le triangle de Pascal

$\cancel{= (1-x)^n}$

$= (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k + x^{n+1} \binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} x^{n+2} \right)$ *

$= (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} x^k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} x^{k+1} \right)$

$= (1-x)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} x^k \right)$

$= M_{n+1}(x)$

* car $\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n}$ selon le triangle de Pascal

$\Rightarrow x^{n+1} \binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} x^{n+1} = \binom{2n}{n+1}(1-x) x^{n+1} - \binom{2n}{n} x^{n+2}$

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 19	Session : 2020

Épreuve de : Maths E HEC / ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15. c) D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(G_{n+1}) = 1 - M_{n+1}(p) + \frac{p}{q} M_{n+1}(p)$$

$$= 1 - \left(M_n(p) + q^n p^{n+1}\left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1}p\right) + \frac{p}{q}\left(M_n(q) + p^n q^{n+1} \times \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1}q\right)\right)\right)$$

$$= 1 - M_n(p) + \frac{p}{q} M_n(q) + p^{n+1} q^n \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} q\right) - q^n p^{n+1}\left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1}\right)$$

$$= P(G_n) + p^{n+1} q^n \binom{2n}{n+1}(1-1) - p^{n+1} q^{n+1}\binom{2n+1}{n+1} + q^n p^{n+1}\binom{2n+1}{n+1}$$
d'après 15.a)

$$= P(G_n) + q^n p^{n+1}(1-q)\binom{2n+1}{n+1}$$

$$= P(G_n) - \left(1 - \frac{p}{q}\right)(pq)^{n+1}\binom{2n+1}{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(G_{n+1}) = P(G_n) - \left(1 - \frac{p}{q}\right)(pq)^{n+1}\binom{2n+1}{n+1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

15. d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(G_n) = \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$$

Initialisation $P(G_1) = 1 - (q - p^2/q) - (pq) + p^2$

$$= p/q - (1 - p/q)(pq)$$

$$= p/q - (1 - p/q) \sum_{k=1}^{1} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$$

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$P(G_{n+1}) = P(G_n) - (1 - p/q)(pq)^{n+1} \binom{2n+1}{n+1}$$

$$= \frac{p}{q} - (1 - p/q) \sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k - (1 - p/q)(pq)^{n+1} \binom{2n+1}{n+1}$$

par hypothèse de récurrence

$$\cancel{= \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{2k-1}{k} (pq)}$$

$$= \frac{p}{q} - (1 - p/q) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$$ par linéarité de la somme.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(G_n) = p/q - (1 - p/q) \sum_{k=0}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$

16. $\forall k \in [\![1;n]\!]$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$$

$$= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Conclusion: $\forall k \in [\![1;n]\!]$ $\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}$

```
n= input('n?')
fact = 1
for k = 1:n
 fact=(fact * n)/k
 end
 disp(fact)
```

```
function y = f(n)
  if k>n  y=0
 else
   for k=1:n
  y=(y*n)/k
  end.
  endfunction
```

16. b)
```
e= input('e?')
p= input('p?')
k= 1
while (P1-p - (1-P1-p) sum(f(n)*(p*(1-p))^k) > e
 k=k+1
end
disp(k).
```