

ECRICOME PREPA ECE

MATHS option économique

503735

CLÉMENT

LÉO

25/04/2000

Note de délibération : 20 / 20

Correction 1 :

Appréciation :

Numéro d'inscription 5 0 3 7 3 5

Signature 



Né(e) le 25 / 04 / 2000

Nom CLÉMENT

Prénom(s) LÉO

20 / 20



Épreuve : MATHÉMATIQUES OPTION ÉCONOMIQUE

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Commencez à composer dès la première page...

EXERCICE 1

Partie A : Étude du cas où $a = 1$:

Soit $a = 1$

$$1. \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Et où $(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{O_3}}$$

2. $P(X) = (X-1)^2$ est donc un polynôme annulateur de M .

Son spectre est donc inclus dans les racines de P .

L'unique racine de P est 1

D'où l'unique valeur propre possible de M est 1 .

3. Les colonnes de M forment une famille libre d'après la position des zéros et on sait de plus que $0 \notin \text{Spec}(M)$.

D'où $\ker(M) = \{0\}$.

M est donc inversible.

• 1 est bien valeur propre de M car $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul associé à 1 .

$$(M - I_3)X = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & - 2 & = 0 \\ & 0 & = 0 \\ x & - 2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 2 \\ y & = y. \end{cases} \quad \text{D'où } E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cette famille de vecteurs est libre car ils sont non colinéaires.

D'où c'est une base de $E(\lambda)$.

$$\text{D'où } \sum_{\lambda \in \text{Spec}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 2 < 3.$$

D'où M n'est pas diagonalisable.

Partie B: Étude du cas où $A=0$:

Soit $\alpha=0$

$$4. \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~Supposons que $\lambda \in \text{Spec}(M)$.~~

Soit $x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ un vecteur non nul.

$$(M - I_3)x = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y + z.$$

D'où $\lambda \in \text{Spec}(M)$ et $E_\lambda(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, alors ils forment une

une base de $E_1(M)$. D'où $\dim(E_1(M)) = 2$.

$$5. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de M sont donc liées.

M n'est donc pas inversible.

6. Comme M n'est pas inversible, alors $\ker(M) \neq \{0\}$.

Il est $0 \in \text{Spec}(M)$.

Comme $\lambda \in \text{Spec}(M)$ et que $\dim(E_1(M)) = 2$; et que $\dim(E_0(M)) \geq 1$, et que $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(M)} \dim(E_\lambda(M)) \leq 3$, alors on

en déduit que $\text{Spec}(M) = \{0, 1\}$ et que $\dim(E_0(M)) = 1$, $\dim(E_1(M)) = 2$
d'où $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 3$. M est donc diagonalisable.

Partie C: Étude du cas où $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

7. On note P la matrice représentative de β dans \mathcal{B} .

$$P = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Numéro d'inscription

5 0 3 7 3 5

Signature



Né(e) le

25 / 04 / 2000

Nom

CLÉMENT

Prénom(s)

LÉO

20 / 20

Ecricome

Épreuve : MATHÉMATIQUES OPTION ÉCONOMIQUE

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 07

Commencez à composer dès la première page...

On voit qu'il n'existe pas de triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où P est inversible.D'où $P^{-1} = (u, v, w)$ est bien une base de \mathbb{R}^3 .

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

D'où $f(u) = au$. $(a \in \text{Spec}(f) \text{ donc})$

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $f(v) = v$. $(1 \in \text{Spec}(f) \text{ donc})$

g.

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $f(w) = \lambda v + Pw$ avec $\lambda = a$ et $P = 1$.

Autrement dit, $f(w) = aw + w$.

10. d'après les résultats question 8 et 9,

$$T = \begin{pmatrix} f(u) & f(v) & f(w) \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

11. T est la matrice représentative de f dans \mathcal{P}^2

T est une matrice triangulaire supérieure.

Les valeurs propres de f sont donc sur sa diagonale.

Conclusion: $\text{Spec}(f) = \{1, a\}$; $\dim(E_1(f)) = 2$, $\dim(E_a(f)) = 1$
 $\dim(E_1(f)) + \dim(E_a(f)) = 2 + 1 = 3$, et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
 M est donc diagonalisable.

EXERCICE 2 :

Partie A: Étude de f_n :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. D'après le théorème fondamental de l'intégration, f_n est C^1 sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x+1}$

2. Soit $x > 0$.

$$f_n'(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2n} - 1 \geq 0 \quad \text{car } x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^n + 1)(x^n - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^n \geq 1 \quad \text{car } x^n + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow n \ln(x) \geq 0 \quad \text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante strictement sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1. \quad \forall x > 0, f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

D'ici le tableau suivant:

\ominus		\cup	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	\ominus	+
f_n	\ominus	\searrow	\nearrow

\searrow $f_n(1)$ \nearrow

3. f_n est C^1 sur \mathbb{R}^+ par quotient de fonctions C^1 sur \mathbb{R}^+ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ .

D'où f_n est C^2 sur \mathbb{R}^+ .

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n}-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $n > 1$, $2n > 1$.

D'où pour tout $x > 0$, $(x+1)^2 > 0$; $(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1 > 0$

D'où pour tout $x > 0$, $f_n''(x) > 0$.

Conclusion: f_n est convexe sur \mathbb{R}^+ .

4. a) Soit $t > 1$. (voir fin feuille 07)

On admet que pour tout $t > 1$, $t^{2n} - 1 > n(t^2 - 1)$.

4. b) Soit $x > 1$.

$t^{2n} - 1 > n(t^2 - 1)$ d'après 4. a) avec $t > 1$

$$\Rightarrow \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} > n \frac{t^2 - 1}{t + 1} \quad \text{car } t + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt > n \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t + 1} dt \quad \text{car les bornes sont croissantes,}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt > n \int_1^x t - 1 dt \quad \text{car } t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$$

Numéro d'inscription

5 0 3 7 3 5

Signature



Né(e) le

25 / 04 / 2000

Nom

CLEMENT

Prénom(s)

LEO

20 / 20

Ecricome

Épreuve: Mathématiques option économique

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 / 07

Commencez à composer dès la première page...

On pour tout $t \in]0; 1[$, $f_n(t) \leq \int_0^x \frac{t^{2n-1}}{t+1} dt$ car $n \geq 1$ et $t < 1$
 et donc $t^{2n} - 1 \leq t^2 - 1$

d'autre on a: Pour tout $x > 1$

$$f_n(x) \geq f_n(1) + n \int_1^x t-1 dt$$

$$\Rightarrow \underline{f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2} (x-1)^2}$$

4. c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} (x-1)^2 = +\infty$

d'autre d'après le théorème d'encadrement, $\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty}$

5. $f_n(0) = 0$ d'après le théorème fondamental de l'intégration.

Soit $t \in]0; 1[$, $t^{2n} - 1 < 0$ car $n \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{t^{2n} - 1}{t+1} < 0 \text{ car } t+1 > 0$$

$f_n(1) < 0$ car les bornes sont croissantes

6. D'après A-2, f_n est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
 D'après le théorème de la bijection, f_n est bijective sur $[1; +\infty[$
 dans $f_n([1; +\infty[)$.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } f_n(1) < 0.$$

D'où $0 \in f_n([1; +\infty[)$.

D'où il existe bien une unique solution $x_n \in [1; +\infty[$ telle que
 $f_n(x_n) = 0$.

Partie B: Étude d'une suite implicite:

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

$$= \int_0^x \frac{t^{2n+1} - 1}{t+1} dt - \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1} dt$$

$$= \int_0^x \frac{t^{2n+1} - t^{2n}}{t+1} dt \quad \text{par linéarité}$$

$$= \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{t+1} dt - \int_0^x \frac{t^{2n}}{t+1} dt$$

$$= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^x - \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x^{2n+1} \left[\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

Conclusion: $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{2n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left[\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right]$

P. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$

$$x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2n+2} \geq \frac{1}{2n+1} \quad \text{car } 2n+2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right) \geq 0 \quad \text{car } x^{2n+1} > 0$$

$$\Rightarrow f_{2n+1}(x) - f_n(x) \geq 0 \quad \text{d'après l'égalité p. a)}$$

Conclusion: $\forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{2n+1}(x) \geq f_n(x)$.

P. c) D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$

D'où d'après p. a), pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_{2n+1}(x_n) \geq f_n(x_n)$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_{2n+1}(x_n) \geq 0 = f_{2n+1}(x_{2n+1})$

Car, f_{2n+1} est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

D'œi $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$

$\Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$ car f_{n+1} est strictement croissante.

Conclusion: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

• $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1.

D'œi d'œi le thœrœme de convergence monotone, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

9. a) D'œi 5.) $f_n(u) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $t \in (0; 1)$, $0 \leq t^{2n}$

$$\Rightarrow -1 \leq t^{2n} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{t+1} \leq \frac{t^{2n}-1}{t+1} \quad \text{car } t+1 > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-1}{t+1} dt \leq f_n(u) \quad \text{par croissance des bornes}$$

$$\Rightarrow -\ln(2) \leq f_n(u) \quad \text{car } \int_0^1 \frac{-1}{t+1} dt = -\ln(2)$$

Conclusion: $-\ln(2) \leq f_n(u) \leq 0$.

9. b) D'œi l'œi inœgalitœ (4. b) avec $x = x_n$ et

$$f(x_n) \geq f_n(u) + \frac{n}{2} (x_n - 1)^2$$

$$\Rightarrow 0 \geq f_n(u) + \frac{n}{2} (x_n - 1)^2$$

Numéro d'inscription

5 0 3 7 3 5

Signature



Né(e) le

2 5 / 0 4 / 2 0 0 0

Nom

C C E M E N T

Prénom(s)

L E O

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques option économique

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 4

/ 0 7

Commencez à composer dès la première page...

$$\Rightarrow (x_n - 1)^2 \leq \frac{-f_n(u) \times 2}{n} \quad \text{car } \frac{n}{2} > 0$$

$$\Rightarrow x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{-f_n(u) \times 2}{n}} \quad \text{par croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}} \quad \text{car } -f_n(u) \leq +\ln(2) \text{ d'après } g. a)$$

$$\text{Enfin, } x_n > 1 \Rightarrow x_n - 1 > 0.$$

$$\text{Conclusion: } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}} = 0. \text{ Ainsi, par théorème d'encadrement}$$

$$\text{on déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Partie C: Étude d'une fonction de deux variables:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

10. D'après A-1), f_n est C^2 sur \mathbb{R}^+ .

D'où G_n est C^2 sur $(\mathbb{R}^+)^2$ par produit de fonctions C^2 sur $(\mathbb{R}^+)^2$

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\bullet \partial_x G_n(x, y) = f_n(y) f_n'(x)$$

$$= \frac{f_n(y)(x^{2n} - 1)}{x+1}$$

$$\bullet \partial_y G_n(x, y) = f_n(x) f_n'(y)$$

$$= \frac{f_n(x)(y^{2n} - 1)}{y+1}$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

$$\begin{cases} \partial_x G_n(x, y) = 0 \\ \partial_y G_n(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_n(y)(x^{2n} - 1) = 0 \\ f_n(x)(y^{2n} - 1) = 0 \end{cases}$$

On remarque ici que les uniques points critiques de G_n sont:

- $(1, 1)$ car $1^{2n} - 1 = 0$
- (x_n, x_n) car $f_n(x_n) = 0$.

Conclusion: $\{(1, 1); (x_n, x_n)\}$ est l'ensemble des points critiques de G_n .

12. Comme G_n est C^2 sur $(\mathbb{R}^+)^2$, alors pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\bullet \partial_{x,x}^2 G_n(x, y) = f_n(y) f_n''(x)$$

$$\bullet \partial_{y,y}^2 G_n(x, y) = f_n''(y) f_n(x)$$

$$\bullet \partial_{y,x}^2 G_n(x, y) = f_n'(y) f_n'(x)$$

$$\bullet \partial_{x,y}^2 G_n(x, y) = \partial_{y,x}^2 G_n(x, y) \text{ car d'après le théorème de Schwarz avec } G_n \text{ } C^2 \text{ sur l'ouvert } (\mathbb{R}^+)^2.$$

12.

$$\text{D'au } \nabla^2 G_n(x, y) = \begin{pmatrix} f_n(y) f_n'(x) & f_n'(x) f_n'(y) \\ f_n'(x) f_n'(y) & f_n(x) f_n'(y) \end{pmatrix}$$

$$\text{D'au } \nabla^2 G_n(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } \nabla^2 G_n(u, u) = \begin{pmatrix} f_n(u) f_n'(u) & 0 \\ 0 & f_n(u) f_n'(u) \end{pmatrix}$$

13. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \nabla^2 G_n(x_n, x_n) - \lambda I_2 \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & -\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice n'est pas inversible si et seulement si:

$$\lambda^2 - (f_n'(x_n))^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = (f_n'(x_n))^4$$

$$\Leftrightarrow \lambda = (f_n'(x_n))^2 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est bijective sur } \mathbb{R}_+.$$

D'au ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Conclusion: (x_n, x_n) est un minimum local de G_n .

Numéro d'inscription

5 0 3 7 3 5

Signature



Né(e) le

2 5 / 0 4 / 2 0 0 0

Nom

C L Ē M E N T

Prénom(s)

L Ē O

20 / 20

Ecricome

Épreuve : MATHÉMATIQUES OPTION ÉCONOMIQUE

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 5 / 0 7

Commencez à composer dès la première page...

14. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$D^2 G_{\lambda}(u, u) = \lambda I_2$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda f_u(u) f_u'(u) & 0 \\ 0 & -\lambda f_u(u) f_u'(u) \end{pmatrix}$$

cette matrice n'est pas inversible si et seulement si

$$(-\lambda f_u(u) f_u'(u))^2 = 0$$

Or, $f_u(u) < 0$ et $f_u'(u) > 0$ car f_u' est convexe sur \mathbb{R}^+ .

$$D'où $(-\lambda f_u(u) f_u'(u))^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.$$

D'où (u, u) n'est pas un extremum local de G_{λ} .

EXERCICE 3:

Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

1. $f \mapsto f^{-n}$ est continue sur $[a; +\infty[$, car $a > 0$

Donc $\int_a^{+\infty} f^{-n} dt$ est impropre en $+\infty$

Soit $M > a$. $\int_a^M f^{-n} dt$

$$= \left[\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_a^M$$

$$= \frac{1}{(n-1)M^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$$

Comme $n > 2$, alors $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n-1)M^{n-1}} = 0$.

Donc $\int_a^{+\infty} f^{-n} dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$

2. a) f est continue sur \mathbb{R} car f peut être en a car la fonction nulle l'est sur $] -\infty; a[$ et par quotient de fonctions non nulles et continues sur $[a; +\infty[$.

• f est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

Soit $M > 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^M f(t) dt &= \int_a^M \frac{3a^3}{t^4} dt \\ &= 3a^3 \int_a^M \frac{1}{t^4} dt. \end{aligned}$$

D'après 1. avec $n=4$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= 3a^3 \times \frac{1}{3a^3} \\ &= \underline{1}. \end{aligned}$$

Conclusion: f est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

2. b) Pour tout $x \leq a$, $P(X \leq a) = 0$ car $x(t) =]a; +\infty[$

Soit $x > a$, $P(X \leq a)$

$$\begin{aligned} &= \int_a^x \frac{3a^3}{t^4} dt \\ &= 3a^3 \left[-\frac{1}{3t^3} \right]_a^x \\ &= 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3 \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

2. c) Sous réserve de convergence et par continuité de $t \mapsto t^3$ sur $[a; +\infty[$.

$$E(X) = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3} dt$$

$$\text{Soit } M > a. \int_a^M \frac{3a^3}{t^3} dt = 3a^3 \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_a^M$$

$$= 3a^3 \left[-\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2a^2} \right]$$

On $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2M^2} = 0$. D'où $E(X)$ existe bien et vaut $\frac{3a}{2}$

2. d) D'après le théorème de transfert et la continuité de $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R} , sous réserve d'existence,

$$E(X^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2} dt$$

$$\text{Soit } M > a. \int_a^M \frac{3a^3}{t^2} dt$$

$$= 3a^3 \left[-\frac{1}{t} \right]_a^M$$

$$= 3a^3 \left[-\frac{1}{M} + \frac{1}{a} \right]$$

On $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} = 0$. D'où $E(X^2)$ existe et vaut $3a^2$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X)$ existe et:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 3a^2 - \frac{3a^2}{4} = \underline{\underline{\frac{3a^2}{4}}}$$

Numéro d'inscription

5 0 3 7 3 5



Né(e) le

2 5 / 0 4 / 2 0 0 0

Signature

Nom

C L E M E N T

Prénom(s)

L E O

20 / 20

Épreuve :

Mathématiques option économique

Sujet

1

ou

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

6

7

Commencez à composer dès la première page...

Conclusion: $V(x) = \frac{3a^2}{4}$ 3. Soit $U \sim U(0; 1)$ et $Y = U^{\frac{a}{3}}$ a) $U \sim U(0; 1)$.D'où $U^{\frac{a}{3}} \sim U(0; 1)$ car $x \mapsto x^{\frac{a}{3}}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ D'où $U^{\frac{1}{3}} \sim U(0; 1)$ par inverse et car $U > 0$.D'où $Y \sim U(a; +\infty)$ 3. b) Pour tout $x < a$, $P(Y \leq x) = 0$.Soit $x > a$, $P(Y \leq x)$

$$= P(U^{\frac{a}{3}} \leq x) \quad \text{car } a > 0$$

$$= P(U \geq \frac{a}{x}) \quad \text{car } x \mapsto \frac{a}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$= P(U > (\frac{a}{x})^3) \quad \text{car } x \mapsto x^3 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$= 1 - P(U \leq (\frac{a}{x})^3)$$

$$= 1 - (\frac{a}{x})^3 \quad \text{car } U \sim U(0; 1)$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a-x}{a}\right)^3 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

$F_Y = F_X$ et $Y(\omega) = X(\omega)$.

D'où X et Y suivent la même loi.

3. c) fonction $Y = \sin \pi X (a, n, m)$

$Y = a \cdot \sin(\pi \text{rand}(n, m) \cdot \frac{1}{3})$

endfunction

4. a) $P([X > 2a])$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right) \quad \text{car } 2a > a.$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

4. b) D'après la formule des probabilités conditionnelles avec $P([X > 2a]) \neq 0$,

$$P([X > 2a] | [X > 6a])$$

$$= \frac{P([X > 2a] \cap [X > 6a])}{P([X > 2a])}$$

$$= \frac{P([X > 6a])}{P([X > 2a])}$$

car comme $a > 0$, $[X > 2a] \cap [X > 6a] = [X > 6a]$.

$$= \frac{P([X > 6a])}{P([X > 2a])}$$

D'où $[X > 2a] \cap [X > 6a] = [X > 6a]$

$$= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$$


```

4. c) if  $x(k) > 2 * a$ 
       $s_1 = s_1 + 1$ 
      if  $x(k) > 6 * a$  then
         $s_2 = s_2 + 1$ 
      end
    end
  end
  if  $s_1 > 0$  then
    disp( $s_2 / s_1$ )
  end

```

5. a) V_n est fonction de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) et indépendant de a .

V_n est donc un estimateur de a .

$$\begin{aligned}
 E(V_n) &= E\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \\
 &= \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n E(x_k) \text{ par linéarité} \\
 &= \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n \frac{3a}{2} \text{ d'après l.c)} \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

Conclusion: V_n est un estimateur sans biais de a .

5. b) V_n est un estimateur sans biais de a .

$$D'au \text{ } \sigma_a(V_n) = V(V_n).$$

D'après l.d), $V(V_n)$ existe car $V(x_k)$ existe.

$$V(U_n) = V\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right)$$

$$= \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \quad \text{par indépendance des } (X_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$$

$$= \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n \frac{3a^2}{4} \quad \text{d'après 2. d)}$$

$$= \frac{3a^2}{9n}$$

Conclusion: $\sigma_a(U_n) = \frac{a^2}{3n}$

6. a) Pour tout $x < a$, $F_{W_n}(x) = 0$.

Pour tout $x > a$, $F_{W_n}(x)$

$$= P(W_n \leq x)$$

$$= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \quad \text{par indépendance}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n \left(\frac{a}{x}\right)^3$$

$$= 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{3n}$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geq a \end{cases}$

F_{W_n} est bien continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R}^+ . W_n est donc bien à densité.

Numéro d'inscription

5 0 3 7 3 5



Né(e) le

25 / 04 / 2000

Signature

Nom

C L E M E N T

Prénom(s)

L E O

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques option économique

Sujet

1

ou

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

7

/

7

Commencez à composer dès la première page...

6. b) Pour obtenir une densité de W_n , nous allons dériver F_{W_n} sur $]-\infty; a[$ et sur $]a; +\infty[$. $\forall x \in]-\infty; a[$, $F_{W_n}^{-1}(x) = 0$ car $F_{W_n}(x) = 0$.

$$\forall x > a, F_{W_n}^{-1}(x) = -a^{3n} \times \frac{(-3n)x^{3n-1}}{x^{2(3n)}}$$

$$= 3na^{3n} x^{3n-1-6n}$$

$$= \frac{3na^{3n}}{x^{3n+1}}$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{W_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{3na^{3n}}{x^{3n+1}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

6. c) Par continuité de $f(t) + f_{W_n}(t)$ sur $]a; +\infty[$, on a, pour $M > a$,

$$\int_a^M 3n \left(\frac{a}{t}\right)^{3n} dt = 3na^{3n} \int_a^M \frac{1}{t^{3n}} dt$$

$$= 3na^{3n} \left[\frac{1}{(3n-1)t^{3n-1}} \right]_a^M$$

$$= 3na^{3n} \left[\frac{1}{(3n-1)a^{3n-1}} - \frac{1}{(3n-1)M^{3n-1}} \right]$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^{3n-1}} = 0.$$

D'où $E(W_n)$ existe et vaut :

$$\underline{E(W_n) = \frac{3na}{3n-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } \ln &= \frac{3n-1}{3n}, E(\ln W_n) \\ &= \ln E(W_n) \text{ par linéarité} \\ &= a. \end{aligned}$$

Ainsi $\ln W_n$ est bien un estimateur sans biais de a car c'est fonction de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) ; indépendant de a et $E(\ln W_n) = a$.

6. d) Comme $\ln W_n$ est un estimateur sans biais de a , son risque quadratique se réduit à sa variance.

Calcul de $E(W_n^2)$:

D'après le théorème de transfert et la continuité de $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R} , sous réserve d'existence,

$$E(W_n^2) = \int_a^{+\infty} 3na^{3n} \times \frac{1}{t^{3n-1}} dt$$

$$\text{Soit } M > a. \int_a^M 3na^{3n} \frac{1}{t^{3n-1}} dt$$

$$= 3na^{3n} \left[-\frac{1}{(3n-2)t^{3n-2}} \right]_a^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{(3n-2)M^{3n-2}} = 0$$

$$\text{D'où } E(\omega_n^2) = 3na^{3n} \times \frac{1}{(3n-2)a^{3n-2}}$$

$$= \frac{3na^2}{3n-2}$$

D'où d'après la formule de Koenig-Stuygens:

$$V(\ln \omega_n) = E((\ln \omega_n)^2) - E(\ln \omega_n)^2$$

$$= \ln^2 E(\omega_n^2) - a^2 \quad \text{par linéarité et car } E(\ln \omega_n) = a$$

$$= \frac{(3n-1)^2}{3n^2} \times \frac{3na^2}{3n-2} - a^2$$

$$= \frac{(3n-1)^2 a^2}{3n(3n-2)} - a^2$$

$$= \frac{a^2 [(3n-1)^2 - 3n(3n-2)]}{3n(3n-2)}$$

$$= \frac{a^2 [9n^2 - 6n + 1 - 9n^2 + 6n + 1]}{3n(3n-2)}$$

$$= \frac{a^2}{3n(3n-2)}$$

Conclusion: $\sigma_a(\omega_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$

7. a) for $k = 1:m$

$V(k) = (2 * \text{sum}(X(k,:))) / n$

end

end function

7. b) $W = \text{simul}(w(a, m, n))$

$V = \text{simul}(V(a, m, n))$

$\text{plot2d}(V, \text{style} = -1)$

$\text{plot2d}(W, \text{style} = -2)$

V est presque égale à la moyenne empirique qui semble en effet être plus stable et constante que le minimum d'un échantillon.

Retour à l'exercice 1, question 4. a) :

On pose f telle que $\forall t \geq 1, f(t) = t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$.

f est C^1 sur $]1; +\infty[$ par produit de fonctions C^1 sur $]1; +\infty[$.

$\forall t \geq 1, f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt$

$= 2nt[t^{2n-2} - 1] \geq 0$ car $t \geq 1$ et $n \geq 1$.

D'où $\forall t \geq 1, f'(t) \geq 0$.

D'où f est croissante sur $]1; +\infty[$.

D'où $\forall t \geq 1, f(t) \geq f(1)$

$\Leftrightarrow f(t) \geq 0$

$\Leftrightarrow t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$

Conclusion: $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$