W5-00237 079702 Maths 2E

Code épreuve : 287 **Nombre de pages :** 22 **Session :** 2020

Épreuve de : Maths 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I - Biais par la taille, exemples discrets.

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 1/5)$.

a) i) $\forall k \in [\![0;10]\!],\ p_k = \binom{10}{k}(1/5)^k(4/5)^{10-k}$.

ii) $E(X) = 2$.

iii) $V(X) = 8/5$ $\quad E(X^2) = V(X) + E(X)^2$

$= 8/5 + 4$

$= 28/5$.

1. b) i) Pour tout $k \in [\![1;10]\!]$ N_k représente le nombre d'enfants qui font partie d'une famille à k enfants.
Il dépend donc des k enfants multipliée par la proportion des des familles à k enfants (p_k) multipliée par leur nombre.
D'où $N_k = k p_k M$.

1. b) ii) $\dfrac{N}{M} = \dfrac{\sum_{k=0}^{10} k p_k M}{\sum_{k=1}^{10} M_k}$

$= \dfrac{M}{M}\sum_{k=1}^{10} k p_k$

$= E(X)$

$= 2$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1. b) iii) $\frac{kp_k}{2}$ représente le nombre total k d'enfants divisé par le nombre moyen d'enfants ($E(X)$). D'où $p_k^* = \frac{kp_k}{2}$.

1. c) i) Pour tout $k \in [\![1;10]\!]$, la probabilité qu'une personne au hasard soit issue d'une famille à k enfants vaut la proportion des familles à k enfants par rapport à l'ensemble des familles.

D'où $\forall k \in [\![1,10]\!]$, $P(Y=k) = p_k^*$.

1. c) ii) $E(Y) = \sum_{k=1}^{10} k^2 p_k \times \frac{1}{2}$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 p_k \times \frac{1}{E(X)}$ car $E(X) = 2$

$= \frac{E(X^2)}{E(X)}$ d'après le théorème de transfert.

1. c) iii) D'après 1. a), $E(Y) = \frac{28}{10} = \frac{14}{5} > E(X)$.

2. a) $\sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) = E(X)$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

D'où $\frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) = 1$.

D'où $\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = 1$.

2. b) $E(X^*) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\, q_i$ qui converge d'après l'énoncé

$= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P(X=i) \times \frac{1}{E(X)}$

$= \frac{E(X^2)}{E(X)}$ d'après le théorème de transfert.

2. c) Supposons que $E(X^2)$ existe.

$$E(X)(E(X^*) - E(X))$$
$$= E(X)\left(\frac{E(X^2)}{E(X)} - E(X)\right)$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$
$$= V(X) \quad \text{selon la formule de Koenig-Huygens.}$$

Conclusion : $V(X) = E(X)(E(X^*) - E(X))$.

2. d) Si $V(X)$ existe, comme X n'est pas identiquement nulle,
alors $V(X) > 0$
$$\Leftrightarrow E(X)(E(X^*) - E(X)) > 0$$
$$\Rightarrow E(X^*) > E(X) \quad \text{car } E(X) > 0.$$

3. a) Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

i) $X^*(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$
$$P(X^* = k) = \frac{k\,P(X = k)}{E(X)}$$
$$= \frac{k\, e^{-\lambda} (\lambda)^k}{\lambda\, k!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

3. a) ii) $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^* = X^*(\Omega)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P((X+1) = k)$
$$= P(X = k-1)$$
$$= \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \quad \text{car } k-1 \in \mathbb{N}$$
$$= P(X^* = k).$$

Conclusion : X^* et $X+1$ suivent la même loi.

3.b) i) $P(X^* = k) = \dfrac{k P(X=k)}{E(X)}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \quad P(X=k) = \dfrac{E(X) P(X^* = k)}{k}$ car $k \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad P(X=k) = \dfrac{E(X) P(X+1 = k)}{k}$ car X^* et $X+1$ suivent la même loi

$\Leftrightarrow \quad P(X=k) = \dfrac{E(X) P(X = k-1)}{k}$

3.b) ii) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \frac{E(X)^k}{k!} P(X=0)$$

Initialisation. $P(X=0) = \dfrac{E(X)^0}{0!} P(X=0)$ car $0! = E(X)^0 = 1$

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

D'après 3.b) i), $P(X=k) = \dfrac{E(X) P(X=k-1)}{k}$

par hypothèse de récurrence $= \dfrac{E(X)}{k} \dfrac{E(X)^{k-1} P(X=0)}{(k-1)!}$

$= \dfrac{E(X)^k}{k!} P(X=0)$.

Conclusion: $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \dfrac{E(X)^k}{k!} P(X=0)$

3. b) iii) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=0) \frac{E(X)^k}{k!} = 1$

$\Leftrightarrow \quad P(X=0) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E(X)^k}{k!} = 1$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E(X)^k}{k!}$ est une série exponentielle qui converge vers $\exp(E(X))$. En posant $\lambda = E(X) > 0$, on a :

$P(X=0) = e^{-\lambda}$ et $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 22	Session : 2020

Épreuve de : Maths 2E ESSEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = E(X)$.

4. Soit $n \geq 1$ et $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

a) i) $\forall k \in [\![1;n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} j P_{[X=k]}(T=j) = \sum_{j=k+1}^{n} j P_{[X=k]}(T=j) + \sum_{j=1}^{k} j P_{[X=k]}(T=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} j/k$$

$$= \frac{k(k+1)}{2k}$$

$$= \frac{(k+1)}{2}$$

4) a) ii) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j P(X=k) P_{[X=k]}(T=j)$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X=k) \sum_{j=1}^{n} j P_{[X=k]}(T=j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{2} P(X=k)$$

$$= \frac{E(X+1)}{2}$$ d'après le théorème de transfert et car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

4. a) iii) Soit $\{X=k,\ k\in[\![1;n]\!]\}$ un sce de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales associée à ce sce,

$$E(T) = \sum_{j=1}^{n} j\,P(T=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{k=1}^{n} P(X=k \cap T=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{k=1}^{n} P(X=k)\,P_{[X=k]}(T=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j\,P(X=k)\,P_{[X=k]}(T=j).$$

4. a) iv) En inversant les indices k et j et comme

$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j\,P_{[X=k]}(T=j)\,P(X=k) = \frac{E(X+1)}{2}$, on a ainsi

$$E(T) = \frac{E(X+1)}{2}$$

4. b) i) $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \forall j\in[\![1;n]\!]$,

$$P_{[X^*=k]}(T^*=j) = P_{[X=k]}(T=j).$$

Or, d'après 4. a) i), $\sum_{j=1}^{n} j\,P_{[X=k]}(T=j) = \frac{(k+1)}{2}$.

D'où $\sum_{j=1}^{n} j\,P_{[X^*=k]}(T^*=j) = \frac{(k+1)}{2}$

4. b) ii) De même qu'en 4. a) iii), avec le sce $\{X^*=k,\ k\in[\![1;n]\!]\}$ de probabilités non nulles et d'après la formule des probabilités totales,

$$E(T^*) = \sum_{j=1}^{n} j\,P(T^*=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{k=1}^{n} P(X^* = k \cap T^* = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j \, P(X^* = k) P_{(X^* = k)}(T^* = j).$$

4. b) iii) D'après (4.b) ii) et i),

$$E(T^*) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j \, P_{(X^*=k)}(T^* = j) P(X^* = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X^* = k) \times \frac{(k+1)}{2}$$

$$= \frac{E(X^* + 1)}{2}$$ d'après le théorème de transfert.

4. b) iv) D'après 2.c),

$$E(X^*) \geq E(X)$$

$$\Rightarrow \frac{E(X^*+1)}{2} \geq \frac{E(X+1)}{2}$$ par linéarité

$$\Rightarrow E(T^*) \geq E(T).$$

Deuxième partie.

5. a) . g est continue sur $\mathbb{R}^+$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

. g est continue sur $\mathbb{R}^-$ car la fonction nulle l'est sur $\mathbb{R}^-$.

D'où g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0.

. g est positive car f l'est et $E(X) > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \frac{E(X)}{E(X)} = 1.$$

Conclusion : g est une densité de probabilité.

5. b) Soit $a > 0$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $P(aX \leq x) = 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P(aX \leq x) = F_X(\frac{x}{a})$.

D'où par dérivation, on obtient f_{aX} la densité de aX.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{aX}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{a} f(\frac{x}{a}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{aX}(x) = \frac{1}{a} f(\frac{x}{a})$.

5. b) ii) $(aX)^*(\Omega) = aX^*(\Omega)$.

On note g la densité de $(aX)^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x f(\frac{x}{a}) \frac{1}{a}}{E(aX)} = \frac{x f(\frac{x}{a})}{a^2 E(X)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{aX^*}(x) = \frac{1}{a} f_{X^*}(\frac{x}{a}) = \frac{1}{a} \frac{x}{a} \frac{f_X(\frac{x}{a})}{E(X)} = \frac{x f(\frac{x}{a})}{a^2 E(X)} = g(x)$$

Conclusion: $(aX)^*$ et aX^* suivent la même loi.

5. c) D'après le théorème de transfert, la continuité de h et sous réserve d'existence,

- $E(Xh(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) f(t) \, dt$.

Or h est bornée. D'où il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq h(t) \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) f(t) dt \leq \alpha E(X)$$ car $E(X)$ existe et les bornes sont croissantes.

D'où $E(Xh(X))$ est bien définie.

• $E(h(X^*)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) g(t) dt$ sous réserve d'existence

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \frac{t f(t)}{E(X)} dt$$

Or $E(Xh(X))$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) t f(t) dt$.

D'où $E(h(X^*))$ existe aussi et vaut $\frac{E(Xh(X))}{E(X)}$

6. a) f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

1er cas : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \leq x_2$,

$f(x_1) - f(x_2) \leq 0$ et $g(x_1) - g(x_2) \leq 0$. (par croissance)

D'où $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2ième cas : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \geq x_2$.

$f(x_1) - f(x_2) \geq 0$ et $g(x_1) - g(x_2) \geq 0$ par croissance.

D'où $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$.

Conclusion : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$.

6. b) X_1 et X_2 sont indépendantes.

D'où d'après le lemme des coalitions, $f(X_1)$ est indépendante de $f(X_2)$ et $g(X_1)$ est indépendante de $g(X_2)$ et $f(X_1)$ de $g(X_2)$ et $g(X_1)$ de $f(X_2)$.

D'où $E((f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2)))$

$= E(f(X_1)g(X_1) - f(X_1)g(X_2) - f(X_2)g(X_1) + f(X_2)g(X_2))$

$= E(f(X_1)g(X_1) + f(X_2)g(X_2)) - E(f(X_1)g(X_2)) - E(f(X_2)g(X_1))$ (linéarité)

$= 2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X))E(g(X))$ par indépendance et car X_1 et X_2 suivent la loi de X.

6. c) D'après 6. a),

$E((f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))) \geq 0$

$\Rightarrow 2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X))E(g(X)) \geq 0$ d'après 6. b)

$\Rightarrow E(f(X)g(X)) \geq E(f(X))E(g(X))$.

7. a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n$.

1er cas : $x \in [0;1]$. Alors $0 \leq x^p \leq 1$ par croissance de $x \mapsto x^p$ sur $[0;1]$

D'où $0 \leq x^p \leq 1 + x^{n+1}$ car $x^{n+1} \geq 0$.

2ième cas : $x \geq 1$. Alors $1 \leq p \leq n$

$\Rightarrow 0 \leq x^p \leq x^n$ par croissance de $t \mapsto x^t$ sur $[1;+\infty[$

$\Rightarrow 0 \leq x^p \leq 1 + x^{n+1}$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq n,\ \forall x \geq 0,\ 0 \leq x^p \leq 1 + x^{n+1}$

7. a) ii) D'après 7.a) i), $0 \leq X^p \leq 1 + X^{n+1}$
Or, $E(X^{n+1})$ existe.
D'où on a bien : $0 \leq E(X^p) \leq 1 + E(X^{n+1})$
D'où $E(X^p)$ existe.

7. b) D'après 6. avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = x^n$ croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$E(f(X)g(X)) \geq E(f(X))E(g(X))$$
$$\Rightarrow E(X^{n+1}) \geq E(X)E(X^n).$$

7. c) On note h la fonction qui à x associe x^n.
X^* est la loi biaisée par la taille de X.
D'où d'après l'énoncé, $E(h(X^*)) = \dfrac{1}{E(X)} E(Xh(X))$
$$= \frac{E(X^{n+1})}{E(X)}$$

Or, selon 7. b), $E(X^{n+1}) \geq E(X)E(X^n)$
$\Leftrightarrow \dfrac{E(X^{n+1})}{E(X)} \geq E(X^n)$ car $E(X) > 0$
$\Leftrightarrow E((X^*)^n) \geq E(X^n).$

8. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq t \\ 1 & \text{si } x > t. \end{cases}$

g_t est donc croissante sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto 0$ l'est sur $]-\infty; t]$ et $x \mapsto 1$ l'est sur $]t; +\infty[$.

8. b) Sous réserve d'existence, d'après le théorème de transfert et la continuité de g_t sur $]t; +\infty[$,

$$E(Xg_t(X)) = \int_t^{+\infty} x\, g_t(x) f(x)\, dx.$$

Or, X est une variable positive admettant une espérance.

D'où $0 \le \int_t^{+\infty} |x g_t(x) f(x)| dx \le \int_0^{+\infty} x f(x) dx$ car $g_t(x) \le 1$.

D'où $E(X g_t(X))$ existe par théorème de comparaison des intégrales à termes positifs.

$\cancel{E(X g_t(X)) = \int_t^{+\infty}}$

D'après 6. et la croissance de $\begin{cases} f : t \mapsto t \\ g_t : x \mapsto \mathbb{1}_{]t,+\infty[}(x) \end{cases}$, on a directement : $E(X g_t(X)) \geq E(X) E(g_t(X))$

$\iff E(X g_t(X)) \geq E(X) P(X > t)$ car $E(g_t(X)) = \int_t^{+\infty} f(x) dx = P(X > t)$.

8. c) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$P(X^* > t) = \int_t^{+\infty} x f(x) \times \frac{1}{E(X)} dx$$

$$= \frac{1}{E(X)} E(X g_t(X))$$ par linéarité de l'intégrale et la convergence

Or selon 8. b), $E(X g_t(X)) \geq E(X) P(X > t)$

$$\iff \frac{E(X g_t(X))}{E(X)} \geq P(X > t)$$

$$\iff P(X^* > t) \geq P(X > t).$$

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(X^* > t) \geq P(X > t)$.

9. a) $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité

$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

$= \mu$.

Sortie WC 9h45 - 9h47

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 22 | Session : 2020

Épreuve de : Maths 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9. b) Si tous les X_i sont de même loi, alors tous les u_i sont égaux.

D'où $J \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

9. c) i) $\mathbb{1}_{[J=i]} = \begin{cases} 0 & \text{si } J \neq i \\ 1 & \text{si } J = i \end{cases}$

D'où $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[J=i]} = 1 + \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \setminus [J \neq i]}} 0$

$= 1$

D'où $h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(T_n) \mathbb{1}_{[J=i]} = \sum_{i=1}^{n} h(S_n - X_J + X_J^*) \mathbb{1}_{[J=i]}$

9. c) ii) $\mathbb{1}_{[J=i]} \hookrightarrow \mathcal{B}(P(J=i))$.

D'où $E(\mathbb{1}_{[J=i]}) = P(J=i)$.

D'où $E(h(T_n)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} h(T_n) \mathbb{1}_{[J=i]}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} E(h(S_n - X_i + X_i^*) \mathbb{1}_{[J=i]})$ par linéarité

$= \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{[J=i]}) E(h(S_n - X_i + X_i^*))$ par indépendance

$= \sum_{i=1}^{n} P(J=i) E(h(S_n - X_i + X_i^*))$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9. d) Soit $i \in [\![1;n]\!]$ et $s \in \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé page 3 avec X_i^* la loi biaisée de X par la taille et h respectant les conditions demandées,

$$E(h(s+X_i^*)) = \frac{1}{E(X_i)} E(X_i h(s+X_i))$$
$$= \frac{E(X_i h(s+X_i))}{\mu_i}$$

Conclusion: $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $E(h(s+X_i^*)) = \dfrac{E(X_i h(s+X_i))}{\mu_i}$

9. e) $E(h(T_n))$:

$$= \sum_{i=1}^{n} P(J=i) E(h(S_n - X_i + X_i^*))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(J=i) \frac{1}{\mu_i} E(X_i h(S_n)) \quad \text{d'après l'énoncé}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(J=i) \frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^{n} X_i h(j) P(S_n=j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(J=i) \frac{1}{E(X_i)} E(X_i h(S_n))$$

On admet la relation.

9. f) D'après l'énoncé fin de page 3 avec h respectant les conditions demandées, comme $E(h(T_n)) = \dfrac{E(S_n h(S_n))}{E(S_n)}$, alors T_n suit la loi S_n biaisée par la taille.

Troisième partie.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![1;n]\!]$.

a) i) Pour tout m-uplet $(a_1, \dots, a_m)$ d'entiers distincts de $[\![1;n]\!]$,

$$P(S=(a_1, \dots, a_m)) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{n-m+1}$$

d'après l'équiprobabilité

$$= \frac{(n-m)!}{(n-m)!} \times \frac{1}{n(n-1)\times \dots \times (n-m+1)}$$

$$= \frac{(n-m)!}{n!}$$

10. a) ii) Comme l'ordre ne compte plus, il y a donc $m!$ permutations de A.

Comme $P(S=(a_1, \dots, a_m)) = \frac{(n-m)!}{n!}$, alors pour tout ensemble $A=\{a_1, \dots, a_m\} \subset [\![1;n]\!]$ de cardinal m (d'où le $m!$), on a

$$P(R=A) = \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

Comme il y a n éléments différents, alors $\text{Card}(\Omega) = n!$

Le nombre d'issues favorables pour que $R=A$ vaut $m!(n-m)!$

On a donc $P(R=A) = \frac{\text{Card(Issues favorables)}}{\text{Card}(\Omega)}$

"R" est donc choisie uniformément dans $\mathcal{P}_m$.

10. b) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1[)$. $U(\Omega) = [0;1[$.

D'où $\lfloor nU \rfloor(\Omega) = [\![0;n-1]\!]$

D'où $1+\lfloor nU \rfloor(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. $P(X=k) = P(\lfloor nU \rfloor = k-1)$

$= P(k-1 \leq nU < k)$

$= P(\frac{k-1}{n} \leq U \leq \frac{k}{n})$ car $n>0$

$= k/n - \frac{k-1}{n}$

$= 1/n.$

Conclusion : $\forall n \in [0;1[\Rightarrow (1+\ln n)(\Omega) \subset [1;n]$.

10.c) function x = uniforme(n)
x = 1+ floor(n * rand())
endfunction

10.d) function [x, W] = Selection(V)
n = length(V)
x = uniforme(n) // fonction de 10.c)
~~W = V - (V(K) == x)~~
endfunction

10.e) R(i) = uniforme(n)
Selection(V)
end
endfunction.

11. a) i) $E(X) = E(\frac{1}{m}\sum_{i \in R} x_i)$

$= \sum_{A \in P_m} \frac{1}{m} P(R = A) x_A$ selon le sce $\{A \in P_m\}$

$= \sum_{A \in P_m} \frac{m!(n-m)!}{n!} \frac{1}{m} x_A$

$= \binom{n}{m}^{-1} \sum_{A \in P_m} \bar{x}_A$

11. a) ii) $A \in P_m$. D'où $Card(A) = m$.
Donc chaque partie A il y a m éléments compris entre 1 et n.
Pour que $i \in A$, il y a $m!$ issues et $n(n-1) \times \ldots \times (n-m+1)$ cas possibles

11. a) iii) On admet la relation.

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 22

Session : 2020

Épreuve de : Maths 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11. a) iv) $E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{A \in P_m} \bar{x}_A$ selon 11. a) i)

$$= \binom{n}{m}^{-1} \frac{1}{m} \sum_{A \in P_m} \sum_{i \in A} x_i$$

$$= \binom{n}{m}^{-1} \frac{1}{m} \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ selon a) iii)}$$

$$= \frac{m!(n-m)!}{n!\, m} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \bar{x}$$

Conclusion : $E(X) = \bar{x}$

11. a) v) $\theta = \sum_{i=1}^{n} y_i \times \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \times \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \text{car } n \neq 0$$

$$= \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

$$= \frac{E(Y)}{E(X)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11. b) $E(\theta_R) = E\left(\frac{y_r}{\bar{x}_r}\right)$

$$= E\left(\frac{\frac{1}{m}\sum_{i\in R} y_i}{\frac{1}{m}\sum_{i\in R} x_i}\right)$$

$= E\left(\frac{Y}{X}\right)$ d'après l'énoncé.

11. c) i) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée à $W = \sqrt{X}$ et $Z = \sqrt{\frac{1}{X}}$ qui admettent des moments d'ordre 2,

~~On admet~~

$$E\left(\sqrt{X} \times \sqrt{\tfrac{1}{X}}\right) \leq \sqrt{E(\sqrt{X}^2)}\sqrt{E\left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \sqrt{E(X)}\sqrt{E\left(\tfrac{1}{X}\right)}$$

$\Rightarrow \quad 1 \leq E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$ car $E(X) > 0$

11. c) ii) Supposons que $X = E(X) = \bar{x}$.

Alors $\frac{1}{E(X)} = \frac{1}{\bar{x}}$ et $E\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{1}{\bar{x}}\right) = \frac{1}{\bar{x}}$.

Il y a donc égalité si X est constante.

Supposons que $E(X)^{-1} = E(X^{-1})$

Alors $\frac{E(\frac{1}{X})}{E(X)} = 1$. ~~D'où, $X = \frac{1}{X}$~~ D'où $V(X)$ est nul.

X est donc constante.

Conclusion : $E(\frac{1}{X}) = \frac{1}{E(X)} \iff X$ est une variable aléatoire constante.

11. c) iii) $E(\frac{1}{X}) = \frac{1}{E(X)}$

$\iff X = E(X)$

$\iff X = \bar{x}$

$\iff \frac{1}{m}\sum_{i\in R} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\iff \frac{1}{m}\sum_{i\in R} x_i = \bar{x}$

$\Rightarrow x_i = \bar{x}$ car il y a m possibilités tel que $i \in R$

Supposons que $x_i = \bar{x}$.

$x_i = \bar{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{m}\sum_{i\in R} x_i = \bar{x}$

$\Rightarrow X = \bar{x}$.

Conclusion : $E(\frac{1}{X}) = \frac{1}{E(X)} \iff$ pour tout i, $x_i = \bar{x}$.

12. a) i) $R = V \cup \{J\}$.

D'où $[R = A] = [V \cup \{J\} = A]$.

~~$V \subset J$. D'où $V \cup \{J\} = J$~~ Soit le sce $\{J = i, i \in A\}$ de probabilités non nulles.
D'après la formule des probabilités totales associée à ce sce,

$P(R = A) = P(V \cup \{J\} = A)$

$= \sum_{i\in A} P([J = i] \cap [V \cup \{J\} = A])$

$$= \sum_{i\in A} P(J=i)\, P_{[J=i]}(V \cup \{J\} = A\}$$

$$= \sum_{i\in A} P(J=i)\, P_{[J=i]}(V = A\setminus\{i\})$$ car comme $J=i$, il faut choisir un groupe de $m-1$ clients de A où i n'en fait pas partie.

Conclusion: $P(R=A) = \sum_{i\in A} P(J=i)\, P_{[J=i]}(V=A\setminus\{i\})$.

12. a) ii)

$$P(R=A) = \sum_{i\in A} P(J=i)\, P_{[J=i]}(V=A-\{i\})$$

$$= \sum_{i\in A} P(J=i) \times \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}}$$

$$= \sum_{i\in A} \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \times xi \times \frac{1}{\sum_{r=1}^{n} xr}$$

$$= \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \frac{n}{n} \frac{m}{m} \sum_{i\in A} xi \times \frac{1}{\sum_{r=1}^{n} xr}$$

$$= \left(\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\right)^{-1} \frac{m}{n} \times \frac{1}{m}\sum_{i\in A} x_i \times \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} xr}$$ car $n = \frac{1}{1/n} \neq 0$

$$= \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}$$ car $\frac{1}{m}\sum_{i\in A} x_i = \bar{x}_A$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

et $\frac{(n-1)!\, n}{(m-1)!\,(n-m)! \times m} = \binom{n}{m}$

Conclusion: $\boxed{P(R=A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 22	Session : 2020

Épreuve de : Maths 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13. a) $\check{\theta}_R = \dfrac{\bar{y}_R}{\bar{x}_R}$

$\cancel{E(\check{\theta}_R) = \sum_{A \in \mathcal{P}_m}}$

13. b) $E(\check{\theta}_R) = \dfrac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \dfrac{\bar{y}_A}{\bar{x}}$

$$= \frac{1}{\bar{x}\binom{n}{m}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \bar{y}_A$$

$$= \frac{1}{\bar{x}\binom{n}{m}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{m} \sum_{i \in A} y_i$$

$$= \frac{1}{\bar{x}} \times \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{1}{m} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \sum_{i \in A} y_i$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \sum_{i \in A} y_i$$

$$= \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{i=1}^{n} y_i \times \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \text{d'après 11. a) iii)}$$

$$= \theta.$$

Conclusion : $E(\check{\theta}_R) = \theta.$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13. a) $\cancel{E(\hat{\theta}_R) = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} P(R=A)}$

$$E(\hat{\theta}_R) = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}_A} P(R=A) \text{ selon le théorème de transfert}$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}} \quad \text{car} \quad P(R=A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}$$

Conclusion : $E(\hat{\theta}_R) = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751