W5-00237 079702 Maths E	Code épreuve : 298	Nombre de pages : 21	Session : 2020
	Épreuve de : Maths E EDHEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1 :

1) • $A_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• $A_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car si $M = 0_n$, alors ${}^tM = 0_n = -0_n = -M$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in A_n(\mathbb{R})^2$

${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB$ par linéarité de la transposée

$= -\lambda A + (-B)$ car $(A, B) \in A_n(\mathbb{R})^2$

$= -(\lambda A + B)$. D'où $(\lambda A + B) \in A_n(\mathbb{R})$

Conclusion : $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a) Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$f(M) = {}^tAM + MA$.

${}^tf(M) = {}^tM A + {}^tA {}^tM$ car ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

$= -MA - {}^tAM$

$= -(MA + {}^tAM)$

$= -({}^tAM + MA)$ par commutativité de l'addition matricielle

$= -f(M)$.

Conclusion : $f(M) \in A_n(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. b) $f : A_n(\mathbb{R}) \to A_n(\mathbb{R})$ d'après 2.a)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(B,M) \in (A_n)(\mathbb{R})^2$.

$$f(\lambda B+M) = {}^tA(\lambda B+M) + (\lambda B+M)A$$
$$= \lambda {}^tAB + \lambda BA + {}^tAM + MA$$
$$= \lambda f(B) + f(M)$$

f est donc une application linéaire de $A_n(\mathbb{R})$ dans $A_n(\mathbb{R})$

Conclusion : f est un endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$.

Soit $n=3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in A_n(\mathbb{R})$.

D'où ${}^tM = -M$

$$\text{D'où } {}^t\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = e = i = 0 \\ b = -d \\ h = -f \\ c = -g \\ g = -c \\ f = -h \end{cases}$$

D'où $A_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

car $b = -d$ car $c = -g$ car $h = -f$

Conclusion : $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $A_3(\mathbb{R})$.

3. b) D'après la position des 0 dans les vecteurs J, K et L, $\mathcal{B}$ est une famille libre,

D'où $\mathcal{B}$ est une base de $A_3(\mathbb{R})$.

D'où $\text{Dim}(A_3(\mathbb{R})) = 3 = \text{Card}(\mathcal{B})$

4. a) $f(J) = {}^tAJ + JA$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -J - L.$$

$$f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 0_3$$

$$f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L$$

4. b) On en déduit que :

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect(f(L), f(J)) \\ &= Vect(-L, -J-L) \\ &= Vect(L, J+L) \end{aligned}$$

Or cette famille est libre car il n'existe aucune combinaison linéaire entre L et $J+L$.
Conclusion : $(L, J+L)$ est une base de $Im(f)$.

4. c) D'après 3.b), $Dim(A_3(\mathbb{R})) = 3$.
D'après le théorème du rang, $Dim(Ker(f)) = Dim(A_3(\mathbb{R})) - Dim(Im(f)) = 1$

Comme $f(K) = O_3$, alors $K \in Ker(f)$.
Comme $Dim(Ker f) = 1$, alors $Ker f = Vect(K)$.
Comme K est non nul, il constitue une base de $Ker f$.

5. a)

$$F = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(J) & f(K) & f(L) & \\ \end{array}$$
$$F = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccc} f(J) & f(K) & f(L) \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} f(J) & f(K) & f(L) & \\ \left(\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} J \\ K \\ L \end{matrix} \end{array}$$

Les coefficients sont bien dans ~~$\{0;1\}$~~ $\{-1;0\}$

5. b) F est une matrice triangulaire inférieure.
Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale.
Conclusion : $Spec(f) = \{-1;0\}$

5. c) Soit $M \in A_3(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul.

$$(M+I_3)X = 0_{3,1}$$
$$\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \iff \{ x = y = 0$$

D'où $Dim(Ker(f+Id)) = 1$.
D'où d'après le théorème du rang, $rg(f+Id) = 2$.
D'où $\sum_{\lambda \in Spec(f)} Dim(E_\lambda(f)) = 2 \neq 3$. Conclusion : f n'est pas diagonalisable.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 21	Session : 2020

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

EXERCICE 2 :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma^2)$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(-x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt$$

Soit $M > x$. On pose $u = -x$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.
D'après ce changement de variable :
- $du = u' dt = -dt$
- $-x = x$
- $-M = M$

$$\int_{-M}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = - \int_{M}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du$$
$$= \int_{x}^{M} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du.$$

D'où en faisant tendre M vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt - \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt \right)$$
$$= 1 - F_X(x).$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

2. $Y = |X|$ et Y est une variable aléatoire.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_-$. $F_Y(x) = 0$ car $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $F_Y(x) = P(|X| \leq x)$

$= P(-x \leq X \leq x)$

$= F_X(x) - F_X(-x)$

$= 2F_X(x) - 1$ d'après 1.)

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2. b) F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction nulle l'est sur $\mathbb{R}^-$, par somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = 0 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = F_Y(0)$.

F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0.

D'où Y est bien une variable aléatoire à densité.

~~2. c) D'après le théorème de transfert, par continuité de $t \mapsto |t|$ sur $\mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,~~

~~$E(Y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$~~

Par dérivation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2f_X(x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

2.c) D'après le théorème de transfert, par continuité de $t \mapsto |t|$ sur $\mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} t f_Y(t)\,dt \quad \text{car } |t| = t \text{ pour } t \geq 0$$

$$= \int_0^{+\infty} t\, 2 f_X(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\theta\sqrt{2\pi}}\, t e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt$$

Or, $$\int_0^{M} \frac{1}{\theta} t e^{-t^2/2\theta^2}\,dt = -\theta \int_0^{M} \frac{1}{\theta^2}(-t) e^{-t^2/2\theta^2}\,dt$$

$$= -\theta \left[e^{-t^2/2\theta^2} \right]_0^M$$

$$= \theta - \frac{\theta}{e^{\frac{M^2}{2\theta^2}}} \xrightarrow[M \to +\infty]{} \theta$$

D'où $E(Y)$ existe et on a :

$$E(Y) = \frac{2\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^2}(-t) e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt$$

$$= \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

3. S_n est fonction de l'échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ et indépendant de θ. C'est donc un estimateur de θ.

$$E(S_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{car les } Y_k \text{ suivent la même loi que } Y.$$

D'où $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, Y_n$ est un estimateur sans biais de Y_n.

2.b) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma^2)$. D'où $E(X^2) = V(X) = \sigma^2$.

$E(Y^2) = E(|X|^2)$.

D'après le théorème de transfert et la continuité de $t \mapsto |t|^2$, sous réserve de convergence,

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} t^2 f_Y(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt$$

Or, $|X|^2 = (\sqrt{X^2})^2$
$= X^2$

D'où $E(Y^2) = E(X^2)$
$= \sigma^2$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(Y) = \sigma^2 - \sigma^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$= \sigma^2(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}})$.

$$V(S_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) \quad \text{par indépendance des } Y_k$$

$$= \frac{\sigma^2(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}})}{n}$$

3. c) T_n étant un estimateur sans biais de σ, son risque quadratique se réduit à sa variance.

$$r_\sigma(T_n) = V(T_n)$$
$$= V\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, S_n\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} V(S_n)$$
$$= \frac{\pi\sigma^2(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}})}{2n}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi\sigma^2(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}})}{2n} = 0$. T_n est donc un estimateur convergent de σ.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

4) X = grand(1, n, 'nor', 0, sigma)
Y = abs(X)
S = sum(Y)/n
T = S * sqrt(%pi/2)

EXERCICE 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, $q = 1-p$

1) Soit $n=1$. $P([X=1]) = 1$
D'où, en appelant succès l'évènement "Avoir une boule blanche", on en déduit que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

2. $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et il y a situation d'équiprobabilité.
D'où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$.
D'où $E(X) = \frac{1}{2}(n+1)$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

3. Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
Si $[X=k]$ se réalise, alors $Y(\Omega) = [\![1;k]\!]$.
L'évènement $[Y=i]$ où $i \in [\![1;k]\!]$ signifie "Parmi k boules, i sont blanches"
Y, conditionnellement à $[X=k]$, suit donc une loi binomiale de paramètre k et p.

$\forall k \in [\![1;n]\!], \forall i \in \mathbb{N}, P_{[X=k]}([Y=i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } i \in [\![0;k]\!] \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) X = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)

5) a) Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, si $[X=k]$, alors $Y(\Omega) = [\![0;k]\!]$.
D'où $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

Soit le sce $\{X=k ; k \in [\![1;n]\!]\}$ de probabilités non nulles.
D'après la formule des probabilités totales associée à ce sce,

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} P([X=k] \cap [Y=0])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X=k) P_{[X=k]}(Y=0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} q^k$$

$$= \frac{1}{n} q \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

Conclusion : $P(Y=0) = \dfrac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$

5. b) D'après la formule des probabilités totales associée au même sce,
pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$P(Y=i) = \sum_{k=1}^{n} P([X=k] \cap [Y=i])$$

$$= \sum_{k=i}^{n} P([X=k] \cap [Y=i]) + 0 \quad \text{car } [X=k]\cap[Y=i] = \emptyset \text{ si } i > k$$

$$= \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

6. a) Soit $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leq i \leq k \leq n$.

$$i\binom{k}{i} = \frac{i\, k!}{i!\,(k-i)!}$$

$$= \frac{k\,(k-1)!}{(i-1)!\,(k-1-(i-1))!}$$

$$= \binom{k-1}{i-1} \times k$$

<u>Conclusion : $\forall (i,k) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq i \leq k \leq n \Rightarrow i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$</u>

6. b) Y admet une espérance car son support est fini.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k q^{i-k}$$

Or, $1 \leq k \leq i \leq n \Rightarrow 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq i$

D'où $E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} k$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} i\, P(Y=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad \text{d'après 5. b)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad \text{en inversant les indices de sommation}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad \text{d'après 6. a)}$$

$$\underline{= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}}$$

6. c) On pose $j = i-1$.

D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} p^{i+1} q^{k-i-1}$

$$= p\,(p+q)^{k-1} \quad \text{selon le binôme de Newton}$$

$$= p \quad \text{car } p+q=1$$

D'où $E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}$.

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \times p$$

$$= \frac{pn(n+1)}{2n} \quad \text{car c'est une somme usuelle}$$

$$= \frac{p(n+1)}{2}$$

7. a) D'après le théorème de transfert, pour tout $n \geq 2$,

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) P(Y=i)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} i(i-1)\binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$ en inversant les indices de sommation

Or pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $1 \leq i \leq k$,

$$i(i-1)\binom{k}{i} = \frac{i(i-1)\,k!}{i!\,(k-i)!}$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)!}{(i-2)!\,(k-2-(i-2))!}$$

$$= k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$$

D'où $E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} k(k-1)\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}$

7. b) On pose $j = i-2$.

On a $\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i} p^{i+2} q^{k-i-2}$

$$= p^2(p+q)^{k-2}$$ selon le binôme de de Newton

$$= p^2.$$

D'où $E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} p^2 k(k-1)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2020

Épreuve de : Maths EEDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$= \frac{p^2}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k \right)$$

$$= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right) \text{ car } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1) - 6 - 3(n-1)(n+2)}{6} \right)$$

$$= \frac{p^2}{n}\left(\frac{(n^2+n)(2n+1) - 6 - 3n^2 - 3n + 6}{6} \right)$$

$$= \frac{p^2}{n}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 3n^2 - 3n}{6} \right)$$

$$= p^2 \frac{(2n^2 - 2)}{6}$$

$$= \frac{p^2(n^2-1)}{3}.$$

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $E(Y(Y-1)) = \frac{p^2(n^2-1)}{3}$

7.c) Pour $n=1$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. D'où $E(Y(Y-1)) = E(Y^2) - E(Y)$.

$E(Y^2) = pq + p^2$ et $E(Y) = p$.

$= p(q+p) = p$

D'où selon Koenig-Huygens.

$E(Y(Y-1)) = E(Y^2) - E(Y)$

$= 0.$

$= \frac{(1^2-1)p^2}{3}.$

La formule reste valable pour $n=1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. d) Selon la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$
$$= E(Y(Y-1)+Y) - E(Y)^2$$
$$= E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 \text{ par linéarité}$$
$$= E(Y(Y-1)) - E(Y)(E(Y)-1)$$

PROBLEME:

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont continues sur $[0;1]$ par quotient de fonctions continues sur $[0;1]$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$.

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n existent.

2. $$I_0 = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1$$
$$= 1/2.$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{car } x = x+1-1$$
$$= [\ln(1+x)]_0^1 - I_0$$
$$= \ln(2) - 1/2.$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\left(x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\left(x^2 + 2x + 1\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}(1+x)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 x^n \, dx$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$

3. b) D'où $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$

$$\iff I_2 = 1 - I_0 - 2I_1$$

$$\iff I_2 = 1 - 1/2 - (\ln(2) - 1/2))$$

$$\iff I_2 = 1 - \ln(2).$$

3. c) a = b

b = 1/(k+1) - 2*a - aux

4. a) $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq (x+1)^2 \leq 4 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1 \quad \text{car } x \mapsto x^{-1} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{(x+1)^2} \leq x^n \quad \text{car } x^n \geq 0$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

4. b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)^{-1} = 0$.

D'où d'après le théorème d'encadrement, I_n converge vers 0.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

On pose $\quad u = \frac{1}{(1+x)} \Rightarrow u' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$\qquad\qquad v' = x^{n-1} \Leftarrow v = \frac{x^n}{n}$

u et v sont C^1 sur $[0;1]$.

D'après une intégration par parties,

$$J_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n(1+x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} I_n$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n-1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} I_n$

$\iff I_n = n J_{n-1} - \frac{1}{2}$

6. a) $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

$= [\ln(1+x)]_0^1$

$= \ln(2)$.

~~On pose~~ $\quad \cancel{u = x^{n+1} \Rightarrow u' = (n+1)x^n}$

$\qquad\qquad \cancel{v' = \frac{1}{1+x} \Leftarrow v = \ln(1+x)}$

~~u et v sont C^1 sur $[0;1]$.~~

~~D'après une intégration par parties,~~

$$\cancel{J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx}$$

$$\cancel{= [x^{n+1}\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (n+1)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,dx$

$$= \frac{1}{n+1}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

6. b) $J_1 + J_0 = 1$

$\Leftrightarrow \quad J_1 = 1 - \ln(2)$

7) J = 1/(k+1) - J

end

I = n * J - 1/2

8. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Initialisation. $J_1 = 1 - \ln(2)$

$$= (-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^0}{k} \right)$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

D'après 6. a), $J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n$

par hypothèse de récurrence $= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$

car $(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = 1$ $= (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$

car $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$ $= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9.a) D'après qu. 5)a),

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n-1} = \frac{1}{n}(I_n + \frac{1}{2})$

D'où d'après qu. 4.a), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2n} \leq J_{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

D'où par théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.

9.b) D'après l'expression en 8. et la limite en 9.a),

on en déduit que $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

9.c) D'après la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\iff 1 \leq (2(n+1))J_n \leq \frac{2}{n+2} + 1 \quad \text{car } 2(n+1) > 0$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+2} + 1 = 1$.

D'où par théorème d'encadrement, $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)}$

Or $\frac{1}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

D'où par transitivité, $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

10) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^{-n} J_n$
$= (-1)^n J_n$

Or $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

D'où par produit d'équivalents, $u_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{1}{2n}$

10. b) D'après 9. b), $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

~~D'où $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge~~

~~Or $0 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$~~

~~D'où par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ converge.~~

~~Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ ont la même nature.~~

~~Conclusion: $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.~~

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ converge.

On ne peut pas déduire que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge car le critère d'équivalence impose des termes positifs, ce qui n'est pas le cas pour $\frac{(-1)^n}{2n}$ pour tout n impair.

11) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

~~$(k+1)u_{k+1} - k u_k + (-1)^k$~~

~~$= (k+1)\left(\ln(2) - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\right) - k\left(\ln(2) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\right) - (-1)^k$~~

~~$= \ln(2) - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} - k\frac{(-1)}{k+1} - (-1)^k$ par télescopage~~

~~$= \ln(2) -$~~

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{k+1} + \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= \ln(2) - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} + \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= \ln(2) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} - \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= \ln(2) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

$$= u_k$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = u_{k+1} + \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\iff (k+1)u_k = (k+1)u_{k+1} + (-1)^k$$

$$\iff u_k = (k+1)u_{k+1} - k u_k + (-1)^k$$

1.b) D'où $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

$$= \underbrace{(n+1)u_{n+1} - u_1}_{\text{par télescopage}} + \underbrace{\frac{(-1)(1-(-1)^n)}{2}}_{\text{Somme géométrique}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 + \frac{1}{2}(-1)(1-(-1)^n)$

1.c) $S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 + \frac{1}{2}(0)$ car $(-1)^{2n} = 1$

$u_1 = \ln(2) - 1$ et $u_{2n+1} \sim \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)}$

$$\Rightarrow (2n+1)u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = 1 - \ln(2) - 1/2 = 1/2 - \ln(2)$

$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - \ln(2) + 1 - 1$ car $(-1)^{2n+1} = -1$

Or $(2n+2)u_{2n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)}(2n+2) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$

D'où $\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = 1/2 - \ln(2)$.

Sortie WC 11h12-11h20 X.C
IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :** 21	**Session :** 2020

Épreuve de : Maths EEDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

D'après les preuves de l'énoncé, comme $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = 1/2 - \ln(2)$,

alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1/2 - \ln(2)$.

12. a) On vient de démontrer que :

$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = 1/2 - \ln(2)$, le résultat a) donc.

car $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$

$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751