Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 22 | Session : 2020

Épreuve de : Maths ECE EMLYON

W5-00237 079702 Maths E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE I :

Partie A - Etude de la fonction f :

1. f est dérivable sur $]0;1[$ par quotient de fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur $]0;1[$.
Pour tout $x \in]0;1[$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{1-x} \times \ln(x) - \frac{\ln(1-x)}{x}}{\ln(x)^2}$$

$$= \frac{-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(x)^2}$$

$$= \frac{1}{x(1-x)\ln(x)^2} \times (-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x))$$

2. a) Soit $t \in]0;1[$. $0 < t < 1$

$\Rightarrow \ln(t) < 0$ car $t \mapsto \ln(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow t\ln(t) < 0$ car $t > 0$.

Conclusion : $\forall t \in]0;1[$, $t\ln(t) < 0$.

2. b) Pour tout $x \in]0;1[$, $x(1-x)\ln(x)^2 > 0$.
D'après 2.a) avec $t = x$ et $t = 1-x$ où $(x, 1-x) \in]0;1[^2$:
$-x\ln(x) > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$.

Conclusion : $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) > 0$. D'où f est strictement croissante sur $]0;1[$.

3. a) f est continue sur $]0;1[$ car elle est dérivable sur $]0;1[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(1-x) = 0$.

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

D'où d'après le théorème du prolongement, f est prolongeable par continuité en 0. et $f(0) = 0$.

3. b) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\ln(1-x)}{x\ln(x)}$ pour tout $x \in]0;1[$.

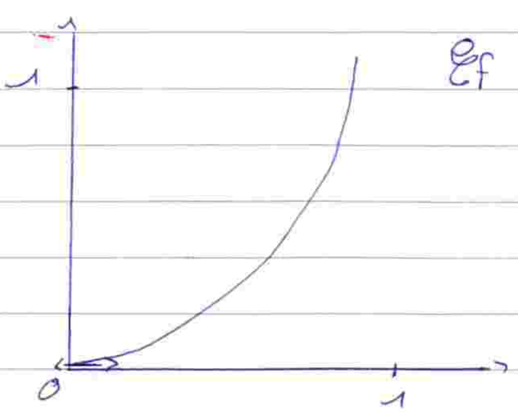
Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$.

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$.

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$. Et la courbe représentative de f sur $]0;1[$ admet donc une asymptote verticale vers $+\infty$ en abcisse 1.

5.



Partie B - Étude d'une suite :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto x^n + x - 1$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[-1 ; +\infty[$ par somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$ par somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le théorème de la bijection, $x \mapsto x^n + x - 1$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1 ; +\infty[$.
Or $0 \in [-1 ; +\infty[$.
D'où il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ solution de (E_n).

7. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et qui à x associe $x^n + x - 1$.
g est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$.
$g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. et $g(u_n) = 0$.
D'où $g(0) < g(u_n) < g(1)$
D'où $0 < u_n < 1$ car g est strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

8. Soit $n = 1$.
$x + x - 1 = 0$
$\iff x = 1/2$.
D'où $u_1 = 1/2$.

Soit $n = 2$.
$x^2 + x - 1 = 0$
$\iff x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Or $u_2 \in]0;1[$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
D'où $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. a)
```
4. while b-a > 10^(-3)
5.    c = (a+b)/2
6.    if (c^n + c-1) > 0 then
7.       a = c
8.    else
9.       b = c
10. end
11. u = [a, b]
```

9. b) On peut conjecturer que :
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite éventuelle et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

10. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n^n + u_n - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow u_n^n = 1 - u_n$$
$$\Leftrightarrow n\ln(u_n) = \ln(1-u_n)$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} \quad \text{car } \ln(u_n) \neq 0.$$
$$\Leftrightarrow f(u_n) = n.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$.

10. b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n)$.
Or d'après le théorème de la bijection, comme f est strictement croissante et continue sur $]0;1[$, alors elle est bijective et f^{-1} est strictement croissante.

D'où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n+1 > n$
$\Rightarrow f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n)$ par croissance de f^{-1}
$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

10. c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$. D'où par symétrie, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$.

Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = f^{-1}(n)$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1$.

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge bien vers 1.

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 22 | Session : 2020

Épreuve de : Maths ECE EMLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C - Étude d'une fonction à deux variables :

11. a) F est C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. D'où pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$\partial_1 F(x,y) = 2xy + 2x - 2$ et $\partial_2 F(x,y) = x^2 - y$
$= 2(xy + x - 1)$

11. b) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) = 0 \\ \partial_2 F(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{car } y = x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = u_3 \\ y = u_3^2 \end{cases}$$ car on reconnaît (E_3) sur la première ligne du système.

Conclusion : L'unique point critique de F est (u_3, u_3^2).

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

12- a) Comme F est C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un ouvert, alors pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$\partial_{1,1}^2 F(x,y) = 2(y+1)$
$\partial_{2,2}^2 F(x,y) = -1$
$\partial_{1,2}^2 F(x,y) = \partial_{2,1}^2 F(x,y)$ d'après le théorème de Schwartz et les hypothèses ci-dessus
$= 2x$

D'où $H = \nabla^2 F(u_3, u_3^2) = \begin{pmatrix} 2(u_3^2+1) & 2u_3 \\ 2u_3 & -1 \end{pmatrix}$

12. b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les valeurs de λ telles que $H - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

$H - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2(u_3^2+1) - \lambda & 2u_3 \\ 2u_3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$H - \lambda I_2$ n'est pas inversible
$\iff -(1+\lambda)(2u_3^2 + 2 - \lambda) - 4u_3^2 = 0$
$\iff -2u_3^2 - 2 + \lambda - 2u_3^2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4u_3^2 = 0$
$\iff \lambda^2 + \lambda(-2u_3^2 - 1) \underline{- 6u_3^2 - 2} = 0.$

Lorsqu'on résout $ax^2 + bx + c = 0$, cela revient à résoudre $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ où x_1 et x_2 sont les racines solutions.
D'après la forme factorisée, on voit que $x_1x_2 = c$ en développant.
Donc ici, avec $x_1 = l_1$ et $x_2 = l_2$ et $c = -6u_3^2 - 2$, on a bien :

$$\underline{\underline{l_1 l_2 = -6u_3^2 - 2}}.$$

13. $\lambda_1\lambda_2 = -6\mu_3^2 - 2 < 0$.
D'où les solutions sont de sens opposé.
On en déduit donc que F n'admet pas d'extrema locaux sur $]0;+\infty[^2$.

EXERCICE 2 :

1. a) . $E \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de référence
. $E \neq \emptyset$ car pour $a = 0$ et $b = 0$, $M(a,b) \in E$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M(a,b), P(a,b)) \in E^2$.

Alors $\lambda M(a,b) + P(a,b) = \begin{pmatrix} \lambda a+a & 0 & 0 & \lambda a+a \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \lambda a+a & 0 & 0 & \lambda a+a \\ \lambda b+b & \lambda b+b & \lambda b+b & \lambda b+b \end{pmatrix}$

Or $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. D'où $(\lambda a+a, \lambda b+b) \in \mathbb{R}^2$.
D'où $\lambda M(a,b) + P(a,b) \in E$.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'après la position des zéros dans chaque vecteur, cette famille est libre aussi.

Conclusion : C'est une base de E et $\mathrm{Dim}(E) = 2$.

1. b) Le produit de deux matrices quelconques de E n'appartient pas forcément à E.

Exemple : $M(1,1) \times M(1,2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \notin E$.

Sortie WC 15h00 Retour 15h02

2. Soit $a=0$ et $b=0$.

D'où $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(M(0,0))=4$. Ainsi, $0\in \mathrm{Spec}(M(0,0))$ et comme M est d'ordre 4 et que $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(M(0,0)))=4=\mathrm{Dim}(E_0(M(0,0)))$, alors M est diagonalisable.

3. Soit $a\neq 0$ et $b=0$.

a. $$A^2=\begin{pmatrix} a&0&0&a\\ a&0&0&a\\ a&0&0&a\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0&a\\ a&0&0&a\\ a&0&0&a\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2&0&0&a^2\\ a^2&0&0&a^2\\ a^2&0&0&a^2\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=aA.$$

D'où $P(X)=X^2-aX=X(X-a)$ est un polynôme annulateur de A.

3. b) Les valeurs propres de A sont incluses dans $\{0;a\}$.

Comme les colonnes de A forment une famille liée, alors on en déduit que $0\in\mathrm{Spec}(A)$ et que $\mathrm{Dim}(E_0(A))=3$.

Soit $X\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul.

$$AX=0_{4,1} \iff \{\, ax+at=0 \iff x=-t \text{ car } a\neq 0.$$

D'où $E_0(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

D'après la position des zéros, la famille est libre c'est donc une base de $E_0(A)$.

Code épreuve : 296	**Nombre de pages :** 22	**Session :** 2020

Épreuve de : Maths ECE EMLYON

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ non nul.

$$(A - aI_4)X = 0_{4,1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ ax - ay = 0 \\ ax - az = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0.$$

D'où $E_a(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ Ce vecteur étant unique et non nul, il est une base de $E_a(M)$.

3. c) $\mathrm{Dim}(E_0(A)) + \mathrm{Dim}(E_a(M))$

$= 3 + 1$

$= 4$. D'où A est diagonalisable.

D'après la formule de changement de base, on a directement :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible car c'est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4. Soit $a=0$ et $b\neq 0$.

a) Les colonnes de B sont toutes égales.
D'où $rg(B)=1$. et $Dim(Ker(B))=3$ d'après le théorème du rang.

$$B-bI_4 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

$(B-bI_4)$ a une colonne nulle et trois colonnes formant une famille libre car b est non nul.
D'où $rg(B-bI_4)=3$.
D'où d'après le théorème du rang $Dim(Ker(B-bI_4))=1$.

4. b) $\cdot$ $Dim(Ker(B))=3 \Rightarrow 0\in Spec(B)$
$\cdot$ $Dim(Ker(B-bI_4))=1 \Rightarrow b\in Spec(B)$.
$\cdot$ $Dim(Ker(B))+Dim(Ker(B-bI_4))=3+1=4$. et $B\in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Conclusion: $Spec(B)=\{0;b\}$ et $Dim(E_0(B))=3$ et $Dim(E_b(B))=1$.

4. c) $b\neq 0$. D'où $\sum_{\lambda\in Spec(B)} Dim(E_\lambda(B))=3+1=4$. et $B\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Conclusion: B est diagonalisable.

5. Soit $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

a) Soit $X\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$M(a,b)X=0_{4,1}$

$$\iff \begin{cases} ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \\ b(x+y+z+t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -t & \text{car } a \neq 0 \\ x+y+z+t = 0 & \text{car } b \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}$$

D'où $\operatorname{Ker}(M(a,b)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

D'où, d'après la position des zéros dans ces vecteurs, cette famille est libre et constitue donc une base de $\operatorname{Ker}(M(a,b))$.

$M(a,b)$ représentant f, on a alors $((-1,0,0,1),(0,1,-1,0))$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

5. b) En notant $u_3 = (-1,0,0,1)$ et $u_4 = (0,1,-1,0)$, on a $\operatorname{Card}(u_1,u_2,u_3,u_4) = 4 = \operatorname{Dim}(\mathbb{R}^4)$ et la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est libre par concaténation de familles libres sur $\mathbb{R}^4$.
D'où $\mathcal{B}' = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. c) • $MV_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 3b \end{pmatrix}$ • $MV_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{pmatrix}$ • $MV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ • $MV_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où $N = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$

5. d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

X est un vecteur propre de N associé à λ

$\iff (N - \lambda I_4) X = 0_{4,1}$

$$\iff \begin{cases} (a-\lambda)x + ay = 0 \\ ax + (a-\lambda)y = 0 \\ ax + ay - \lambda z = 0 \\ 3bx + by - \lambda t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a-\lambda)x + ay = 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

On admet la relation.

5. e) Soit $(a, b) = (1, 1)$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(1-\lambda)(1-\lambda) - 3 = 0$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$

$\Delta = 4 + 8 = 12$.

D'où $\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2}$ sont valeurs propres de T.

$M(1, 1)$ admet λ comme valeur propre et X est associé à λ

$\iff T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $z = t = 0$

$\iff \lambda_1$ et λ_2 sont valeurs propres de M.

5. f) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Spec(T) \iff (1-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0$

$\iff -(1-\lambda)(1+\lambda) + 3 = 0$

$\iff \lambda^2 + 2 = 0$ Ce qui est impossible.

T n'admet pas de valeurs propres.

D'où il n'existe pas de λ tel que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

D'où d'après 5. d), $M(1, -1)$ n'est pas diagonalisable.

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 22 | Session : 2020

Épreuve de : Maths ECE EMLYON

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5. g) $M(a,b)$ est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ Il existe λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et :

$(T-\lambda_1 I_2)X = (T-\lambda_2 I_2)X = 0_{2,1}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(T-\lambda I_2)X = 0$

$\Leftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda) - a3b = 0$
$\Leftrightarrow ab - \lambda b - \lambda a + \lambda^2 - a3b = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(a+b) - 2ab = 0$.

$\Delta = (a+b)^2 + 8ab$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 8ab$
$= a^2 + 10ab + b^2$.

$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R})^2 / (T-\lambda_1 I_2)X = (T-\lambda_2 I_2)X = 0_{2,1}$
$\Leftrightarrow \Delta > 0$
$\Leftrightarrow a^2 + 10ab + b^2 > 0$.

Conclusion : $M(a,b)$ diagonalisable $\Leftrightarrow a^2 + 10ab + b^2 > 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

EXERCICE 3 :

Partie A - Loi de Pareto :

1) • f est continue sur $]0;b[$ car la fonction nulle l'est sur $]0;b[$ et sur $]b;+\infty[$ par quotient de fonctions continues et non nulles sur $[b;+\infty[$.

• f est positive sur $\mathbb{R}$ car $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

• Soit $M > b$.
$$\int_{-\infty}^{M} f(x)\,dx$$
$$= \int_{b}^{M} a \frac{b^a}{x^{a+1}}\,dx$$
$$= ab^a \left[-\frac{1}{a x^a}\right]_b^M$$
$$= 1 - \left(\frac{b}{M}\right)^a \xrightarrow[M \to +\infty]{} 1$$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Conclusion : f est une densité de probabilité

2. Pour tout $x < b$, $F_X(x) = 0$.

Pour tout $x \geq b$, $F_X(x) = \int_b^x f(t)dt$
$$= ab^a\left[-\frac{1}{a t^a}\right]_b^x$$
$$= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$

3. a) Soit $U \hookrightarrow U[0;1[$.

$U(\Omega) = [0;1[$.
D'où $U^{-1/a}(\Omega) = [1;+\infty[$
D'où $bU^{-1/a}(\Omega) = [b;+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty;b[,\ P(bU^{-1/a} \leq x) = 0$.

$\forall x \geq b,\ P(bU^{-1/a} \leq x)$
$= P(U^{-1/a} \leq (x/b))$ car $b > 0$
$= P(U^{1/a} \geq (b/x))$ car $x \mapsto x^{-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$= P(U \geq (b/x)^a)$ car $x \mapsto x^a$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$= 1 - (b/x)^a$ car $U \hookrightarrow U[0;1[$
$= F_X(x)$.

Donc $bU^{-1/a}(\Omega) = X(\Omega)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(bU^{-1/a} \leq x)$.

Conclusion: $bU^{-1/a}$ suit une loi de pareto de paramètres a et b.

3. b)
```
function X= pareto(a,b)
  X = b*(rand()^(-1/a))
endfunction.
```

3. c) L contient, pour p allant de 2 à 6, les réalisation de la variable aléatoire S:

$S_p = \frac{1}{10^p} \sum_{i=1}^{10^p} X_i$ où les (X_i) siens forment un échantillon des lois de Pareto.

Ainsi $L = [\frac{1}{10^2} \sum_{i=1}^{10^2} x_i; \ldots; \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6} x_i]$ où les x_i sont des simulation de la loi de Pareto.

3. d) Plus b est grand et plus X aura de grandes valeurs et donc S_p aussi et plus le couple (a,b) est similaire et plus X prendra de petites valeurs.

4. a) Sous réserve d'existence et d'après la continuité de $t \mapsto t f(t)$ sur $[b ; +\infty[$,

$E(X)$ existe $\Leftrightarrow \displaystyle\int_b^{+\infty} ab^a \frac{1}{t^a}\, dt$

Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^a}\, dt$ est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $a > 1$. (car $b > 0$)

D'où $\displaystyle\int_b^{+\infty} ab^a \frac{1}{t^a}\, dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

D'où $E(X)$ existe si et seulement si $a > 1$.

Soit $a > 1$. et $M > b$.

$$\int_b^M t f(t)\, dt = ab^a \int_b^M \frac{1}{t^a}\, dt$$

$$= ab^a \left[-\frac{1}{(a-1)t^{a-1}} \right]_b^M$$

$$= \frac{ab}{a-1} - \frac{ab^a}{(a-1)M^{a-1}}$$

Or $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} \frac{ab^a}{(a-1)M^{a-1}} = 0$.

D'où $E(X) = \dfrac{ab}{a-1}$

4. b) D'après le théorème de transfert, sous réserve d'existence et par continuité de $t \mapsto t^2 f(t)$ sur $[b ; +\infty[$.

$$E(X^2) = \int_b^{+\infty} ab^a \frac{1}{t^{a-1}}\, dt$$

Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}}\, dt$ est une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si $a - 1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$. (car $b > 0$).

D'où $E(X^2)$ existe si et seulement si $a > 2$.
Or d'après Koenig-Huygens, sous réserve d'existence, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
D'où $V(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 2$ et $\alpha > 1$, donc si et seulement si $\alpha > 2$.

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 296	**Nombre de pages :** 22	**Session :** 2020
	Épreuve de : Maths ECE EMLYON		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Soit $M > b$. et $a > 2$

$$\int_b^M t^2 f(t)\,dt = ab^a \int_b^M \frac{1}{t^{a-1}}\,dt$$

$$= ab^a \left[-\frac{1}{(a-2)t^{a-2}}\right]_b^M$$

$$= \frac{ab^2}{a-2} - \frac{ab^a}{(a-2)M^{a-2}}$$

Or comme $a > 2$, $\lim\limits_{M \to +\infty} \frac{ab^a}{(a-2)M^{a-2}} = 0$.

D'où $E(X^2) = \frac{ab^2}{a-2}$

D'où selon la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{ab^2}{a-2} - \frac{a^2b^2}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{ab^2(a-1)^2 - a^2b^2(a-2)}{(a-1)^2(a-2)}$$

$$= \frac{ab^2(a^2-2a+1-a^2+2a)}{(a-1)^2(a-2)}$$

$$= \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie B - Estimation du paramètre b.

Soit $a = 3$.

5.a) Pour tout $x \in [b; +\infty[$,

$P([Y_n > x]) = P([\min(X_1, \dots, X_n) > x])$

$= P([\bigcap_{i=1}^{n} X_i > x])$

$= \prod_{i=1}^{n} P([X_i > x])$ par indépendance

$= \left(\left(\frac{b}{x}\right)^3\right)^n$

Conclusion : $\forall x \in [b; +\infty[$, $P([Y_n > x]) = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}$

5.b) $Y_n(\Omega) = [b; +\infty[$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P([Y_n \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$

Ainsi Y_n suit une loi de Pareto de paramètres $a = 3n$ et b.

5.c) D'après 4.a), $E(Y_n) = \frac{3nb}{3n-1}$.

D'où par linéarité, $E\left(\frac{(3n-1)Y_n}{3n}\right)$

$= \frac{(3n-1)E(Y_n)}{3n}$

$= b$

De plus, $Y_n' = \frac{(3n-1)Y_n}{3n}$ est fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$

et indépendant du paramètre b. C'est donc un estimateur de b.

Conclusion : Y_n' est un estimateur sans biais de b.

Y_n' est un estimateur sans biais de b. Son risque quadratique est donc réduit à sa variance.

$$V(Y_n') = V\left(\frac{(3n-1)Y_n}{3n}\right)$$

$$= \frac{(3n-1)^2}{(3n)^2} V(Y_n) \quad \text{qui existe car } a = 3 > 2$$

$$= \frac{(3n-1)^2 \, 3n b^2}{(3n)^2 (3n-1)^2 (3n-2)} \quad \text{car } Y_n \text{ suit une loi de Pareto de paramètres } 3n \text{ et } b$$

$$= \frac{b^2}{3n(3n-2)}$$

Conclusion : $r_b(Y_n') = \frac{b^2}{3n(3n-2)}$ (Y_n' est donc un estimateur convergent de b)

6. a) $a = 3 > 2$. D'où $V(X_i)$ et $E(X_i)$ existent pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

$$E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \frac{ab}{a-1}$$

$$= \frac{3b}{2} \quad \text{car } a = 3$$

$$V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad \text{par indépendance mutuelle des } X_i$$

$$= \frac{3b^2}{4n}$$

6. b) On pose $Z_n^- = \frac{2}{3} Z_n$.

· Z_n^- est un estimateur de b car il est indépendant de b et fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

· $E(Z_n^-) = E(\frac{2}{3} Z_n)$

$= \frac{2}{3} E(Z_n)$ par linéarité

$= b$

Conclusion: $\frac{2}{3} Z_n$ est un estimateur sans biais de b.

Son risque quadratique se réduit à la variance.

$V(Z_n^-) = \frac{4}{9} V(Z_n)$

$= \frac{b^2}{3n}$

7. Y_n^- et Z_n^- sont deux estimateurs sans biais et convergent de b.

Cependant, le choix se fait aisément quand on regarde la vitesse de convergence de leurs risques quadratiques respectifs.

Y_n^- a un risque quadratique qui convergera plus rapidement que celui de Z_n^-.

On préfèrera donc choisir Y_n^-.

Partie C - Estimation du paramètre a

Soit $b = 1$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n(\Omega) = [1; +\infty[$

D'où $\ln(X_n)(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$P(W_n \leq x) = P(\ln(X_n) \leq x)$

$= P(X_n \leq e^x)$ par croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}_+$

$= 1 - e^{-ax}$ car X suit une loi de Pareto.

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 22 | Session : 2020

Épreuve de : Maths ECE EMLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Conclusion : $\ln(X_n) \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

Donc on a directement $E(W_n) = \frac{1}{a}$ et $V(W_n) = \frac{1}{a^2}$.

9. M_n admet une espérance car (W_i) en admet une.

$$E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(W_i) \quad \text{par linéarité}$$
$$= \frac{1}{a}.$$

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(W_i)$$ car d'après l'indépendance mutuelle des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et le lemme des coalitions, les (W_i) sont mutuellement indépendantes
$$= \frac{1}{na^2}$$

Par mutuelle indépendance des $(W_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et d'après le théorème Central-Limite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P\left(\left[\frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}} \leq x\right)\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

$$\Leftrightarrow P([T_n \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$ car $\frac{M_n - E(M_n)}{\sigma(M_n)} = \frac{M_n - \frac{1}{a}}{\frac{1}{\sqrt{n}a}} = T_n$

Conclusion : $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9. b) • $\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n}$ et $\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}$ sont deux estimateurs de a.

• $P([\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}]) = 1$

• $P([a \in [\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} ; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}]])$

$= P([\sqrt{n}-2 \leq \sqrt{n}M_n a \leq \sqrt{n}+2])$ car $\sqrt{n}M_n > 0$

$= P([-2 \leq T_n \leq 2])$

Or $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

D'où pour n assez grand, $P([-2 \leq T_n \leq 2])$

$= \Phi(2) - \Phi(-2)$

$= \Phi(2) - 1 + \Phi(2)$

$= 2 \times 0,975 - 1$

$= 1,950 - 1$

$= 0,950.$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} P([\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}]) = 0,950.$

Conclusion: $[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} ; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.