Code épreuve : 282	Nombre de pages : 20	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

V9-00008
095734
Maths S

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I :

1. a) On a $\frac{-1}{t} \xrightarrow[0^+]{} -\infty$ et $e^{t} \xrightarrow[-\infty]{} 0$

donc par composition $e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[0^+]{} 0$

et $\frac{t}{1-t} \xrightarrow[0^+]{} 0$

donc par produit :

$$\boxed{\lim_{t \to 0^+} g(t) = 0}$$

On a $\frac{-1}{t} \xrightarrow[0^-]{} +\infty$, et $\frac{e^{t}}{t} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

donc $\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[0^-]{} +\infty$

On a $\lim_{t \to 0^-} g(t) = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{1-t} \times \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{\frac{1}{t}}$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t-1} \, \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{-\frac{1}{t}}$$

puisque $\frac{1}{t-1} \xrightarrow[0^-]{} -1$

alors par produit

$$\boxed{\lim_{t \to 0^-} g(t) = -\infty}$$

b) u est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$

Soit $t \in \Omega$:

On a $u(t) = \frac{t}{1-t} e^{-\frac{1}{t}}$

donc

$\cancel{u'(t) = \frac{t}{1-t} e}$

$$u'(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)' e^{-\frac{1}{t}} + \frac{t}{1-t} \times \left(e^{-\frac{1}{t}}\right)'$$

$$= \left(\frac{1-t+t}{(1-t)^2} + \frac{1}{t(1-t)}\right) e^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \left(\frac{t}{t(1-t)^2} + \frac{1-t}{t(1-t)^2}\right) e^{-\frac{1}{t}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $U'(t) = \frac{1}{t(1-t)^2} e^{-\frac{1}{t}}$

d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} : U'(t) = \frac{1}{P(t)} e^{-\frac{1}{t}} \text{ avec } P = X(1-X)^2}$

c) on a $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} : U'(t) = \frac{1}{P(t)} e^{-\frac{1}{t}}$ et $e^{-\frac{1}{t}} > 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$U'(t) \geq 0 \Leftrightarrow P(t) > 0$

$\Leftrightarrow t(1-t)^2 > 0$

$\Leftrightarrow t > 0$ car $t \notin \{0,1\}$

et on a donc

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$U'(t)$		$-$	||	$+$	||	$+$	
U	-1 ↘		$-\infty$ || 0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

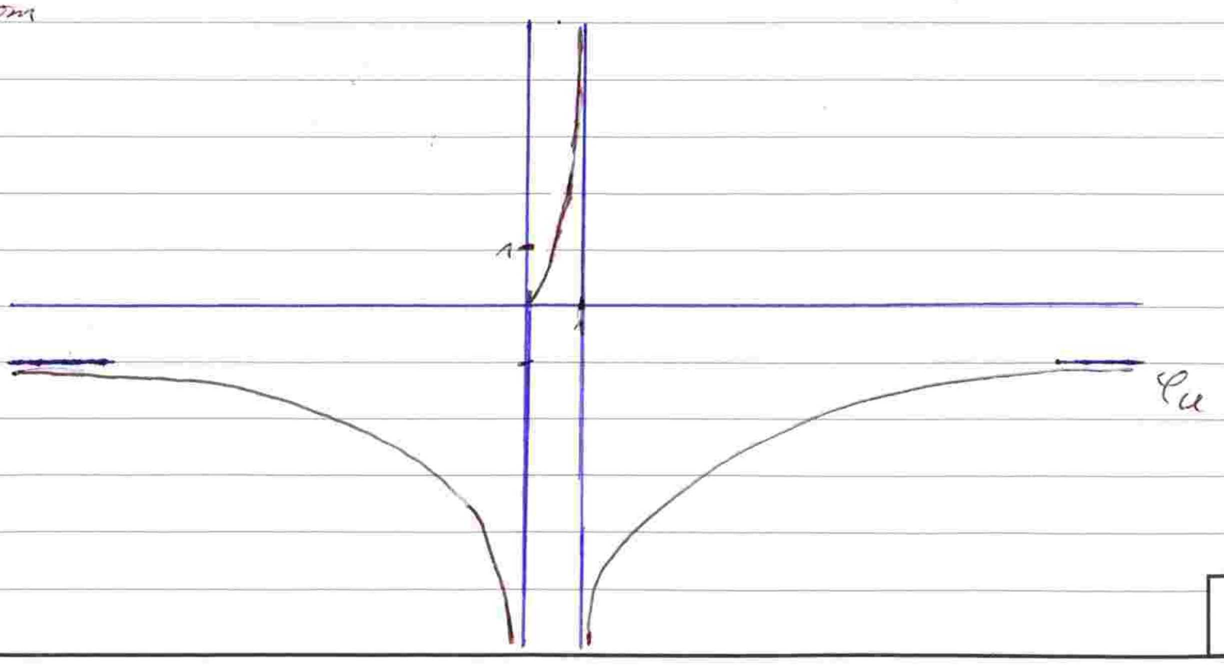
Les limites : $\frac{t}{1-t} \underset{-\infty}{\rightarrow} -1$ et $e^{-\frac{1}{t}} \underset{-\infty}{\rightarrow} 1$ donc $\lim_{t \to -\infty} g(t) = -1$

$\frac{t}{1-t} \underset{1^-}{\rightarrow} +\infty$ et $e^{-\frac{1}{t}} \underset{1^-}{\rightarrow} e^{-1}$ donc $\lim_{t \to 1^-} g(t) = +\infty$

$\frac{1}{1-t} \underset{1^+}{\rightarrow} -\infty$ et $e^{-\frac{1}{t}} \underset{1^+}{\rightarrow} e^{-1}$ donc $\lim_{t \to 1^+} g(t) = -\infty$

$\frac{t}{1-t} \underset{+\infty}{\rightarrow} -1$ et $e^{-\frac{1}{t}} \underset{+\infty}{\rightarrow} 1$ donc $\lim_{t \to +\infty} g(t) = -1$

donc



2- a. On a u est continue et strictement croissante sur $]0,1[$

On a $\lim_{t\to 0^+} g(t)=0$, $\lim_{t\to 1^-} g(t)=+\infty$

donc g est une bijection de $]0,1[$ sur $]0;+\infty[$

On a $\forall t\in]0,1[: \varphi(t)=g(t)$

donc φ est une bijection de $]0,1[$ sur $]0;+\infty[$

et on a $\varphi(0)=0$

d'où $\boxed{\varphi \text{ est bijective de } [0,1[\text{ sur } \mathbb{R}_+}$

b. On a $\forall t\in]0;1[: \varphi(t)=g(t)=\frac{t}{1-t}e^{-\frac{1}{t}}$

On a $t\mapsto \frac{t}{1-t}$ est de classe C^1 sur $]0;1[$

$t\mapsto -\frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $]0,1[$, $\forall t\in]0,1[: -\frac{1}{t}\in\mathbb{R}$

exp est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

donc par composition $t\mapsto e^{-\frac{1}{t}}$ est de classe C^1 sur $]0,1[$

donc par produit φ est de classe C^1 sur $]0;1[$

On a $\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{g(t)}{t}$

$=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{1-t}$

On a $\frac{1}{1-t}\xrightarrow[0^+]{} 1$ et $e^{-\frac{1}{t}}\xrightarrow[0^+]{} 0$

donc $\lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=0$

et $\lim_{t\to 0^+}\varphi'(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t(1-t)^2}=0$ car $\begin{cases} \text{et } \frac{1}{t}\xrightarrow[0^+]{}+\infty \\ te^{-t}\xrightarrow[+\infty]{}0 \end{cases}$ donc $\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\xrightarrow[0^+]{}0$

d'où $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,1[}$

c. On a φ est de classe C^1 sur $[0;1[$

φ est une bijection de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}^+$

donc $\boxed{\varphi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$

d. x = [0:0.01:0.99]

y = (x/(1-x))^2 exp(-1/x)

plot2d(y,x).

3-a. Soit f ~~une~~ fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;1[$

On a f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$: $f(t) \in]0;1[$

φ est de classe C^1 sur $]0;1[$

par composition $\varphi \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

On a $\varphi \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi(f(t)) \in \mathbb{R}_+^*$ car $f(t) \in]0;1[$.

et $\ln$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

donc par composition : $\boxed{\ln \circ \varphi \circ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } (\ln \circ \varphi \circ f)'(t) = (\varphi \circ f)'(t) \times \ln'((\varphi \circ f)(t))$$

$$= f'(t)\, \varphi'(f(t)) \times \frac{(\varphi \circ f)'(t)}{(\varphi \circ f)(t)}$$

$$= f'(t)\, \varphi'(f(t)) \times \frac{f'(t)\, \varphi'(f(t))}{\varphi(f(t))}$$

$$= f'(t)^2 \left(\frac{1}{P(f(t))} e^{-\frac{1}{f(t)}} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{f(t)}{1-f(t)} e^{-\frac{1}{f(t)}}}$$

$$= f'(t)^2 \times \frac{1}{f(t)^2 (1-f(t))^4} \times \frac{1}{\frac{f(t)}{(1-f(t))}} \times e^{-\frac{1}{f(t)}}$$

Ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} :\ (\ln \circ \varphi \circ f)'(t) = f'(t)^2 \times \frac{e^{-\frac{1}{f(t)}}}{(f(t)(1-f(t)))^3}}$

b. Soit $a \in]0;1[$:

Supposons qu'il existe une fonction f_a définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;1[$ vérifiant (1) et $f_a(0) = a$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$: $f_a'(t) = \lambda f_a(t)^2 (1 - f_a(t))$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a : $(\ln \circ \varphi \circ f_a)'(t) = \lambda^2 \times \frac{f_a(t)}{1 - f_a(t)} e^{-\frac{1}{f_a(t)}}$

$$= \lambda^2 \varphi(f_a(t))$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\int_a^x (\ln \circ \varphi \circ f_a)'(t)\, dt = \int_a^x \lambda^2 \varphi(f_a(t))\, dt$

Code épreuve : 882 | Nombre de pages : 10 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4-a) on a $r > 0$

donc $t \mapsto e^{rt}$ est croissante

on a $\varphi(0) = g(a)$

et $a \in]0,1[$, d'après 1-c), $\varphi(0) = g(a) > 0$

donc $t \mapsto \varphi(0) e^{rt}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

on a φ est croissante sur $]0,1[$ $\left(\forall t \in]0,1[: \varphi(t) = g(t) \right.$, $\varphi(0) = 0$, g croissante sur $]0,1[$

et $\varphi(]0,1[) = \mathbb{R}^+$

donc φ^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc par composition $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(0) e^{rt})$ est croissante sur $\mathbb{R}$

D'où $\boxed{f_a \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

on a $e^{rt} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$, $\varphi(0) > 0$ donc $\varphi(0) e^{rt} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

on a $\varphi(t) \xrightarrow[1]{} +\infty$ et φ croissante

donc $\varphi^{-1}(t) \xrightarrow[+\infty]{} 1$

donc par produit $\boxed{\lim_{t \to +\infty} f_a(t) = 1}$

on a $e^{rt} \xrightarrow[-\infty]{} 0$ donc $\varphi(0) e^{rt} \xrightarrow[-\infty]{} 0$

et $\varphi(t) \xrightarrow[0^+]{} 0$ donc $\varphi^{-1}(t) \xrightarrow[0^+]{} 0$ (croissance)

donc $\boxed{\lim_{t \to -\infty} f_a(t) = 0}$

b- On a f_a vérifie (1)

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \lambda f(t)^2 (1 - f(t)) = \lambda (f(t)^2 - f(t)^3)$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a donc $f''(t) = \lambda (2 f'(t) f(t) - 3 f'(t) f^2(t))$

donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : f''(t) = \lambda f'(t) f(t) (2 - 3 f(t))}$

On a Soit $t \in \mathbb{R}$:

$f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda f'(t) f(t) (2 - 3 f(t)) \geq 0$

$\Leftrightarrow f'(t)(2 - 3 f(t)) \geq 0$ car $\lambda > 0$ et $f(t) \in]0, 1[$.

En particulier on a ~~...~~

$t \mapsto \varphi(a) e^{\lambda t}$ est strictement croissante (car $\varphi(a) > 0, \lambda > 0$)

et on a φ^{-1} est strictement croissante.

donc par composition f_a est strictement croissante

donc $\forall t \in \mathbb{R}$: $f'(t) > 0$

donc $f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow (2 - 3 f(t)) \geq 0$

$\Leftrightarrow f(t) \leq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(a) e^{\lambda t}) \leq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \varphi(a) e^{\lambda t} \leq \varphi(\frac{2}{3})$ (φ croissante)

$\Leftrightarrow t \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\varphi(\frac{2}{3})}{\varphi(a)}\right)$ ($\lambda > 0$; $\varphi(a) > 0$ et $\ln$ croissante)

On pose $x_a = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\varphi(\frac{2}{3})}{\varphi(a)}\right)$

On a donc ~~f_a'' s'annule~~

f_a'' ne s'annule qu'en x_a et change de signe.

donc $\boxed{f_a \text{ admet un unique point d'inflexion.}}$

c) d'après 4-b, l'ensemble des points d'inflexion de f_a est

$\boxed{I_a = \left\{ \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\varphi(\frac{2}{3})}{\varphi(a)}\right) / a \in]0, 1[\right\}}$

les tangentes aux courbes représentatives des fonctions f_a en ces points sont coupées par $\mathcal{C}_a$ en ces points.

Partie II :

5. a) $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ est de classe C^2 sur $]0,1[^2$ car $\forall y \in]0,1[$ $y \neq 0$

on a $\forall (x,y) \in]0,1[^2 : \frac{x}{y} > 0$

et $\ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

Par composition, on a : $(x,y) \mapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ ~~est~~ de classe C^2 sur $]0,1[^2$

On a $(x,y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $]0,1[^2$ (affine)

Par produit, on a : $(x,y) \mapsto x \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ ~~est~~ de classe C^2 sur $]0,1[^2$

On a $\forall (x,y) \in]0,1[$ $(1-x, 1-y) \in]0,1[^2$

et $(x,y) \mapsto x \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ ~~est~~ de classe C^2 sur $]0,1[^2$

donc $(x,y) \mapsto (1-x) \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right)$ est de classe C^2 sur $]0,1[^2$

et par sommation, on déduit que :

$\boxed{K \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,1[^2}$

b) Soit $(x,y) \in]0,1[^2$:

on a $K(x,y) = x(\ln(x) - \ln(y)) + (1-x)(\ln(1-x) - \ln(1-y))$

donc $\partial_2(K)(x,y) = -\frac{x}{y} - (1-x) \times \frac{-1}{1-y}$

$= \frac{-x}{y} + \frac{1-x}{1-y}$

$= \frac{-x + xy + y - xy}{y(1-y)}$

donc $\boxed{\forall (x,y) \in]0,1[^2 : \partial_2(K)(x,y) = \frac{y-x}{y(1-y)}}$

c) on a $\forall y \in]0,1[$ $y(1-y) > 0$

donc

$\boxed{\forall (x,y) \in]0,1[^2 : \partial_2(K)(x,y) \geq 0 \iff y \geq x}$

Soit $x \in]0,1[$

on a donc $y \mapsto \partial_2(K)(x,y)$ est ~~positive~~ positive sur $[x,1[$ et négative sur $]0,x]$

donc $y \mapsto K(x,y)$ est décroissante sur $]0,x]$ et croissante sur $[x,1[$

donc $y \mapsto K(x,y)$ admet un minimum global sur $]0,1[$ en x

donc $\forall y \in]0,1[: K(x,y) \geq K(x,x)$

~~on a $K(x,x) = 0$~~

donc $\forall x \in]0,1[, \forall y \in]0,1[: K(x,y) \geq K(x,x)$

donc $\forall (x,y) \in]0,1[^2 : K(x,y) \geq K(x,x)$

or $\forall x \in]0,1[: K(x,x) = 0$

donc $\boxed{K \text{ admet un minimum global égal à } 0}$

~~c) Soit $x \in]0,1[$~~

~~On a $\lim_{y \to 0} h\left(\frac{x}{y}\right) = -\infty$ et $\lim_{y \to 0} h\left(\frac{1-x}{1-y}\right) = -\infty$ car $\begin{cases} \frac{x}{y} \to +\infty \\ \frac{1-x}{1-y} \to +\infty \end{cases}$~~

~~or $(x, 1-x) \in]0,1[$~~

~~donc $\lim_{y \to 0^+} K(x,y) = -\infty$~~

~~D'où $y \mapsto K(x,y)$ n'est pas~~

d) Soit $x \in]0,1[$

~~$\lim_{y \to 1^-} K(x,y) = xh(x) + (1-x)h(\ldots)$~~

On a $\frac{1-x}{1-y} \underset{y \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

et $1-x > 0$

donc $(1-x)\, h\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \underset{y \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$

et on a $x h\left(\frac{x}{y}\right) \underset{y \to 1^-}{\longrightarrow} x h(x)$

donc $\lim_{y \to 1^-} K(x,y) = +\infty$

D'où $\boxed{K \text{ n'est pas majorée}}$

6-a) Soit $(x,y) \in]0,1[^2$:

on a $K(x,y) = x(h(x) - h(y)) + (1-x)(h(1-x) - h(1-y))$

donc $D_1(K)(x,y) = h(x) - h(y) + 1 - (h(1-x) - h(1-y)) - 1$

donc $D_1(K)(x,y) = h(x) - h(y) - h(1-x) + h(1-y)$.

et on a $D_2(K)(x,y) = \frac{y-x}{y(1-y)}$

donc $D^2_{1,1}(K)(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x}$

donc $\boxed{D^2_{1,1}(K)(x,y) = \frac{1}{x(1-x)}}$

et $D^2_{2,2}(K)(x,y) = \frac{y(1-y) - (y-x)(1-2y)}{(y(1-y))^2}$

$= \frac{y - y^2 - y + 2y^2 + x - 2xy}{(y(1-y))^2}$

donc $\boxed{D^2_{2,2}(K)(x,y) = \frac{y^2 - 2xy + x}{(y(1-y))^2}}$

On a K est de classe C^2 sur $]0,1[^2$

donc $D^2_{2,1}(K)(x,y) = D^2_{1,2}(K)(x,y) = \frac{-1}{y} - \frac{1}{1-y} = \frac{-1}{y(1-y)}$

donc $\boxed{D^2_{2,1}(K)(x,y) = D^2_{1,2}(K)(x,y) = \frac{-1}{y(1-y)}}$

Code épreuve : 288 | **Nombre de pages :** 10 | **Session :** 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6-b- Soit $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[^2$

on a $q_{(x,y)}(1,0) = (1\ 0)\,\nabla^2(K)(x,y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$= (1\ 0)\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(K)(x,y) & \partial^2_{1,2}(K)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(K)(x,y) & \partial^2_{2,2}(K)(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \partial^2_{1,1}(K)(x,y)$$

donc $q_{(x,y)}(1,0) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

On sait que $t \mapsto t(1-t)$ admet un maximum global à $\frac{1}{2}$ sur $]0,1[$ qui vaut $\frac{1}{4}$

donc : $0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ $(x \in]0,1[)$

donc $\dfrac{1}{x(1-x)} \geq 4$

D'où $\boxed{\forall (x,y) \in]0,1[^2 : \quad q_{(x,y)}(1,0) \geq 4}$

7-a Soit $t \in [0,1]$:

$q_{z+w t}(w) = (y\ y)\,\nabla^2(K)(y+t(x-y);y)\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}$

on a ~~$\partial^2_{1,1}(K)(y+t(x-y),y) = \frac{1}{(y+t(x-ty))(1-y+tx}$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3- a.a $K(x,u) = \int_0^1 (1-t)\, q_{x+tu}(u)\, dt$

8.a. Saisir $x = [0.01 : 0.01 : 0.99]$

$y = x$

$z = x^* \log(x/y) + (1-x)^* \log((1-x)/(1-y))$.

plot3d(x, y, z).

b. $\boxed{\text{Les lignes de niveaux sont symétriques par rapport à la droite d'équation } y = x.}$

parce qu'on a $\forall (x,y) \in \,]0,1[^2$:

$$K(1-x, 1-y) = K(x,y).$$

Partie III :

8.a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$:

on a $\mathbb{P}^*(X=k) \ln\left(\dfrac{\mathbb{P}^*(X=k)}{\mathbb{P}(X=k)}\right) = e^{-\lambda k} \dfrac{\lambda^{*k}}{k!} \times \ln\left(\dfrac{e^{-\lambda^* k} \frac{\lambda^{*k}}{k!}}{e^{-\lambda k} \frac{\lambda^k}{k!}}\right)$

$= e^{-\lambda^* k} \dfrac{\lambda^{*k}}{k!} \times \ln\left(\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda}\right)^k e^{-(\lambda^*-\lambda)k}\right)$

$= (\lambda - \lambda^*) k \times e^{-}$

9.a On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

on a $\mathbb{P}^*(X=n) = e^{-\lambda^*} \dfrac{\lambda^{*n}}{n!}$ et $\ln\left(\dfrac{\mathbb{P}^*(X=n)}{\mathbb{P}(X=n)}\right) = \ln\left(\dfrac{e^{-\lambda^* n} \frac{\lambda^{*n}}{n!}}{e^{-\lambda n} \frac{\lambda^n}{n!}}\right)$

$= \ln\left(\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda}\right)^n e^{(\lambda-\lambda^*)n}\right)$

$= n \ln\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda}\right) + (\lambda - \lambda^*) n.$

donc $\mathbb{P}^*(X=n) \ln\left(\dfrac{\mathbb{P}^*(X=n)}{\mathbb{P}(X=n)}\right) = e^{-\lambda^*} \dfrac{\lambda^{*n}}{n!} \left(n \ln\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda}\right) + n(\lambda - \lambda^*)\right)$

$\forall n \in \mathbb{N} : \left|\mathbb{P}^*(X=n) \ln\left(\dfrac{\mathbb{P}^*(X=n)}{\mathbb{P}(X=n)}\right)\right| \geq 0$

et par produit $\left|\mathbb{P}^*(X=n) \ln\left(\dfrac{\mathbb{P}^*(X=n)}{\mathbb{P}(X=n)}\right)\right| \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-\lambda^*} \left|\ln\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*\right| \dfrac{\lambda^{*n}}{(n-1)!}$

On a $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\lambda^{*n-1}}{(n-1)!}$ converge (série exponentielle)

donc par linéarité $\sum_{n \geq 1} e^{-\lambda^*} \left|\ln\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*\right| \dfrac{\lambda^{*n}}{(n-1)!}$ converge.

donc par comparaison, on a :

$$\sum_{n\geq 0} \varphi^*(X=n) \ln\left(\frac{\varphi^*(X=n)}{\varphi(X=n)}\right) \text{ converge}$$

donc $\boxed{d(X) \text{ existe}}$

or $d(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda^*} \frac{\lambda^{*n}}{n!} n\left(\ln\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*\right)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda^*} \frac{\lambda^{*n}}{(n-1)!} \left(\ln\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*\right)$

$= \lambda^* e^{-\lambda^*} \left(\ln\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{*n}}{n!}$ (linéarité

$= \cancel{\lambda^* \ln\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*}$ or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{*n}}{n!} = e^{\lambda^*}$

D'où

$d(X) = \lambda^* \ln\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right) + \lambda - \lambda^*$

D'où

$$\boxed{d(X) = -\lambda^* \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \lambda - \lambda^*}$$

b. ~~Si $\lambda \geq \lambda^* \geq 0$ $\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \geq 0$ et $\lambda - \lambda^* \geq 0$~~

or $d(X) = \lambda^*\left(\frac{\lambda}{\lambda^*} - \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) - 1\right)$

or $\frac{\lambda}{\lambda^*} > 0$ et $\forall x > 0$, $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$

donc ln concave et donc sa courbe se situe en dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente en 1.

donc $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$

donc $\forall x > 0$: $\ln(x) \leq x - 1$ car $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

alors $\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \leq \frac{\lambda}{\lambda^*} - 1$

donc $\frac{\lambda}{\lambda^*} - \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) - 1 \geq 0$

or $\lambda^* > 0$

d'où $\boxed{d(X) \geq 0}$

or $\lim_{\lambda \to \lambda^*} \frac{d(X)}{\lambda - \lambda^*} = \lim_{\lambda \to \lambda^*} \frac{\lambda^*}{\lambda - \lambda^*} \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + 1$

$= \lim_{\lambda \to \lambda^*} \frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)}{\frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda^*}} + 1$

$= \lim_{\lambda \to \lambda^*} -\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}} + 1$

or $\frac{\lambda}{\lambda^*} \xrightarrow[\lambda \to \lambda^*]{} 1$ et $\frac{\ln(x)}{1-x} \xrightarrow[1]{} 1$ donc $\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}} \xrightarrow[\lambda \to \lambda^*]{} 1$

Code épreuve : 282 **Nombre de pages :** 20 **Session :** 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

d'où $\lim_{d \to d^*} \frac{d(X)}{d - d^*} = -1 + 1 = 0$

D'où $\boxed{d(X) \underset{d \to d^*}{=} o(d - d^*)}$

10 - a on $U \geq 0$ et par croissance de l'espérance ;

$E(U) \geq E(0)$

or $E(0) = 0$

donc $\boxed{E(U) \geq 0}$

2 - Soit $x > 0$:

on a φ est convexe sur $]0, +\infty[$

donc φ' est croissante sur $]0, +\infty[$

- Si $x > E(U)$ on a $\forall t \in [E(U), x]$: $\varphi'(t) \geq \varphi'(E(U))$

φ est de classe C^1

d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\frac{\varphi(E(U)) - \varphi(x)}{E(U) - x} \geq \varphi'(E(U))$$

donc $\varphi(E(U)) - \varphi(x) \leq \varphi'(E(U))(E(U) - x)$

donc $\varphi(x) - \varphi(E(U)) \geq \varphi'(E(U))(x - E(U))$

- Si $x \leq E(U)$

on a $\forall t \in [x, E(U)]$: $\varphi'(t) \leq \varphi'(E(U))$

donc de même :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(E(U))}{x - E(U)} \leq \varphi'(E(U))$$

donc $\varphi(x) - \varphi(E(U)) \geq \varphi'(E(U))(x - E(U))$.

d_ Supposons que $d(X)$ existe

On a $d(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} \varphi^a(X=n)\, \ell\left(\frac{\varphi^a(X=n)}{\varphi(X=n)}\right)$

$= \sum_{n \in X(\Omega)} \ell(\varphi^a(X=n))\varphi^a(X=n) - \ell(\varphi(X=n))\varphi^a(X=n)$.

donc par linéarité $d(X) = \ell(E(X)) - E(\ell(X))$

On a $\forall n \in \mathbb{R}_+^*$: $\ell''(n) = \left(\frac{1}{n}\right)' = \frac{-1}{n^2} \leq 0$

et ℓ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $-\ell$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

d'après (8) puisque $X > 0$.

On a $-\ell(E(X)) \leq E(-\ell(X))$

donc $\ell(E(X)) \geq E(\ell(X))$

et $\ell(E(X)) \geq E(\ell(X))$

ainsi $\boxed{d(X) \geq 0}$

~~11/ a/ On a $d(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} \varphi^a(X=n)\, \ell\left(\frac{\varphi^a(X=n)}{\varphi(X=n)}\right)$~~

~~On a $(Y=y)_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements~~

Partie IV

13 _ a. Soit $t \in \mathbb{R}$; on pose $h(t) = y(t)e^{-V(t)}$

On a $h'(t) = y'(t)e^{-V(t)} - y(t)v(t)e^{-V(t)}$ $\quad (V'(t) = v(t))$

$= v(t)y(t)e^{-V(t)} - y(t)v(t)e^{-V(t)}$

donc $\boxed{\text{la dérivée de } t \mapsto y(t)e^{-V(t)} \text{ est nulle.}}$

b_ On a donc $\exists a \in \mathbb{R}$ / $\forall t \in \mathbb{R}$: $y(t)e^{-V(t)} = a$

si $y(0) = 0$ alors $y(0)e^{-V(0)} = a$

donc $a = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) e^{-V(t)} = 0$

or $\forall t \in \mathbb{R} : e^{-V(t)} > 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = 0$

d'où $\boxed{\text{si } y(0) = 0 \text{ alors } \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 0}$

~~+ Si $y(0) \neq 0$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$: $y(t) = a e^{V(t)}$~~

~~et $\forall t \in \mathbb{R}$: $y'(t) = v(t) y(t)$~~

~~donc $\forall t \in \mathbb{R}$: $a v(t) e^{V(t)} = v(t) y(t)$~~

~~donc~~

+ si $y(0) \neq 0$, on a $\forall t \in \mathbb{R} : a = y(0) e^{-V(0)}$

or $\forall t \in \mathbb{R} : e^{-V(t)} > 0$

et on a $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) e^{-V(t)} = y(0) e^{-V(0)}$

donc y a le même signe que $y(0)$

d'où $\boxed{\text{si } y(0) \neq 0 \text{ alors } y \text{ a le même signe que } y(0)}$

~~14-c) : on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$: b_i est dérivable sur $\mathbb{R}$~~

~~donc y est dérivable sur $\mathbb{R}$~~

~~on a $\forall t \in \mathbb{R}$: $y'(t) = -\sum_{i=1}^{n} b_i'(t)$~~

~~$= \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{B}(t) - e_i, \nabla \mathcal{B}(t)) b_i(t)$~~

14-a on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$ b_i est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc par somme y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $y(0) = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i(0)$

or $\sum_{i=1}^{n} b_i(0) = 1$

donc $y(0) = 0$

donc d'après 13) $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = 0$

d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} b_i(t) = 1}$

b- ... on a $\sum_{i=1}^{n} b_i(t) = 1$

~~15 - a. Soit $t \in \mathbb{R}$;~~

~~On a $H(\beta(t)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) \ln\left(\frac{\beta_i^{\alpha}(t)}{\beta_i(t)}\right)$~~

~~et $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\beta_i(t)$,~~

15 - a. Soit $t \in \mathbb{R}$:

On a $H(\beta(t)) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \ln\left(\frac{\pi_i}{\beta(t)}\right)$

En utilisant 29-b, avec $\forall i \in X(\Omega)$: $P^{\alpha}(X=i) = \pi_i^{\alpha}$ et $P(X=i) = \beta_i(t)$, on a :

$$\boxed{H(\beta(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i(t) - \pi_i^{\alpha}|\right)^2}$$

~~or~~ $\cancel{t \mapsto \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i(t) - \pi_i|\right)^2}$

b. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $H(\beta(t)) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha} \ln\left(\frac{\pi_i^{\alpha}}{\beta_i(t)}\right)$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

on a $t \mapsto \frac{\pi_i}{\beta_i(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$: $\frac{\pi_i}{\beta_i(t)} > 0$ (14-b)

et $\ln$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

donc par composition, on a : $t \mapsto \ln\left(\frac{\pi_i^{\alpha}}{\beta_i(t)}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

donc $t \mapsto \pi_i^{\alpha} \ln\left(\frac{\pi_i^{\alpha}}{\beta_i(t)}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Par sommation, on a $\boxed{H \circ \beta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Soit $t \in \mathbb{R}$:

On a $(H(\beta(t)))' = \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha} \ln\left(\frac{\pi_i^{\alpha}}{\beta_i(t)}\right)\right)'$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha} \left(\ln(\pi_i^{\alpha}) - \ln(\beta_i(t))\right)'$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha} \frac{\langle e_i - \beta(t), R\beta(t)\rangle \beta_i(t)}{\beta_i(t)}$$

donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ (H \circ \beta)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \langle \beta(t) - e_i ; R\beta(t)\rangle}$

c. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $(H \circ \beta)'(t) = -\sum_{i=1}^{n} \pi_i \langle e_i - \beta(t) ; R\beta(t)\rangle$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\beta(t) \in T$ car $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\beta_i(t) > 0$

donc $\langle \pi^{\alpha} - \beta(t) ; R\beta(t)\rangle \geq 0$

donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$: $\pi_i \langle e_i - \beta(t), R\beta(t)\rangle \geq 0$

donc $(H \circ \beta)'(t) \leq 0$

donc $H \circ \beta$ est décroissante

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 20 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

or d'après 17.a)

$H\circ f$ est minorée

donc sa limite en $+\infty$ est finie

d'où $\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_{t\to+\infty} (H\circ f)(t) = \ell}$

18.a Soit $x \in T \setminus \{x^*\}$

on pose $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

or $x^*_i = \frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1)$

or : $\langle x^* - x, Rx\rangle = \langle x^*, Rx\rangle - \langle x, Rx\rangle$ (linéarité à gauche)

$= \frac{1}{n}(1, 1, \dots 1) R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - q_R(x)$ (q_R forme quadratique associée à R)

$= \frac{1}{n} {}^tU(\alpha I + A){}^tx - q_R(x)$

$= \frac{1}{n}(\alpha {}^tU + {}^tUA){}^tx - q_R(x)$

or $AU = 0$

donc ${}^t(AU) = 0$

donc ${}^tU{}^tA = 0$ or ${}^tA = -A$

donc ${}^tUA = 0$

donc $\langle x^* - x, Rx\rangle = \frac{\alpha}{n} {}^tU{}^tx - x(\alpha I + A){}^tx$

$= \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \alpha x {}^tx - xA{}^tx$

$= \frac{\alpha}{n} -$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE