



WB-00065

274174

Maths 2S

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 12

Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques 2 S ESCP/HEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1

1. a)  $n \in ]0, 1[$ ,  $\forall k \geq 1, \frac{n^k}{k} > 0$ .

$$b^2 \frac{n^k}{k} = k e^{\frac{k \ln(n)}{20}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

Donc par critère de Riemann convergent,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{k}$  converge (absolument).

1. b)  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in ]0, 1[$ ,

$$\sum_{k=0}^{m-1} t^k = \frac{1-t^m}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^m}{1-t}$$

d'où  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in ]0, 1[, \frac{1}{1-t} = \frac{t^m}{1-t} + \sum_{k=0}^{m-1} t^k$

1. c)  $n > 0$  donc  $0 \leq \int_0^n \frac{t^m}{1-t} dt \leq \int_0^n \frac{n^m}{1-t} dt = -n^m \ln(1-n) + n^m \times 0$

or  $n \in ]0, 1[$  donc  $n^m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

donc par théorème d'encadrement,  $\int_0^n \frac{t^m}{1-t} dt \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

1. d) L'égalité de 1.b) étant vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on peut l'intégrer entre 0 et  $n$  (intégrales propres). On a :

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{1}{1-t} dt &= \int_0^n \frac{t^m}{1-t} dt + \int_0^n \sum_{k=0}^{m-1} t^k dt \\ &= \int_0^n \frac{t^m}{1-t} dt + \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^n \\ &= \int_0^n \frac{t^m}{1-t} dt + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

d'où  $\sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k} = -\ln(1-n) + \underbrace{\ln(1)}_0 - \underbrace{\int_0^n \frac{t^m}{1-t} dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow 0} 0 \text{ (1.c)}}$

or  $\sum_{k \geq 1} \frac{n^k}{k}$  converge d'après 1.a)

donc par passage à la limite, on obtient

$$\sum_{k \geq 1} \frac{n^k}{k} = -\ln(1-n)$$

2.a) Il s'agit de montrer que  $\forall n \in [-c, c]$ ,  $\sum_{k \geq 1} |a_k n^k|$  converge.

$\forall n \in [-c, c], \forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $|a_k n^k| \leq |a_k c^k|$

Or  $\sum_{k \geq 1} |a_k c^k|$  converge absolument.

Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général (STG)  $|a_k n^k|$  converge.

Donc  $\sum_{k \geq 1} a_k n^k$  converge absolument donc converge  $\forall n \in [-c, c]$ .

Ainsi  $f$  est bien définie sur le segment  $[-c, c]$

2.b)  $\forall n \in [-c, c]$ ,  $\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} |a_k| \times |n|^k \rightarrow$  on a établi la convergence absolue.

or  $\forall k \geq m+1$ ,  $|n|^k = |n|^{m+1} \times |n|^{k-(m+1)} \leq |n|^{m+1} c^{k-m-1}$

Par ailleurs,  $\sum_{k \geq m+1} |a_k| c^{k-m-1}$  est bien convergente, car  $c^{m+1} M_m$  converge.

donc on obtient:  $\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} |a_k| c^{k-m-1} |n|^{m+1}$

donc  $\forall n \in [-c, c]$ ,  $\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^k \right| \leq M_m |n|^{m+1}$

2.c)  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n^m} \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^k = \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^{k-m}$

d'après l'inégalité de 2.b),  $0 \leq \left| \frac{1}{n^m} \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^k \right| \leq M_m |n| \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$

car  $M_m$  ne dépend pas de  $n$ .

donc par théorème d'encadrement,  $\frac{1}{n^m} \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k n^k \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$

$$\text{donc } \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x^k = o(x^m)$$

$$\text{Or } f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x^k$$

$$\text{donc } \forall m \in \mathbb{N}^*, f(n) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k n^k + o(n^m)$$

2.d) Si  $f$  nulle sur  $[0, c]$ , alors  $\forall n \in [0, c]$  on a :

$$a_0 + \sum_{k=1}^m a_k n^k + o(n^m) = 0$$

en faisant tendre  $n$  vers 0 on a :  $\sum_{k=1}^m a_k x^k \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$  (somme finie de m termes)

et au voisinage de 0,  $x^m = o(1)$  donc  $o(n^m) = o(1) \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$  qui tendent tous vers 0.

d'où  $a_0 = 0$ .

$$\text{Donc } \forall n \in [0, c], n(a_1 + \sum_{k=2}^m a_k n^{k-1} + o(n^{m-1})) = 0$$

$$n \neq 0 \text{ donc on a } a_1 + \sum_{k=2}^m a_k n^{k-1} + o(n^{m-1}) = 0$$

d'où avec  $n \rightarrow 0$  on a  $a_1 = 0$

On réitère le procédé pour obtenir  $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$

Or le développement limité étant valable pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

on obtient que  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est la suite nulle.

## Partie II

3.a) Sur l'espace probabilis'  $(\Omega, \mathcal{A}, P^\theta)$ ,

$$\cdot X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\cdot \forall k \in \mathbb{N}, P^\theta(X=k) = (\theta - 1)^{k-1} \theta \text{ avec } \theta \in [0, 1[$$

donc  $X \sim \mathcal{G}(\theta)$

3.b) Soit  $\Psi$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  tq  $\forall n = (n_1, \dots, n_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\Psi(n) = \frac{n_1 + \dots + n_n}{n}$ .

alors  $\bar{X} = \Psi(X_1, \dots, X_n)$  est une variable aléatoire réelle,

évaluable à partir des seules données de l'expérience.

$\bar{X}$  est donc un estimateur.

$$\text{Par linéarité de l'expérience, } E^\theta(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E^\theta(X_i) = \frac{1}{n} E^\theta(X) = \frac{1}{\theta}$$

donc  $\bar{X}$  est un estimateur sans biais du paramètre  $1/\theta$ .

$$\begin{aligned} 3.c) \bar{X} \text{ est sans biais donc } g_\theta(\bar{X}) &= V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= \frac{n V^\theta(X)}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } g_\theta(\bar{X}) = \frac{1-\theta}{n\theta^2}$$

4.a) Calculons l'espérance de  $\frac{1}{X}$  avec  $X \sim \text{Geo}(\theta)$ .

D'après le théorème de transfert,  $\frac{1}{X}$  vaut ssi la STG  $\frac{(1-\theta)^{k-1}}{\theta}$  converge absolument.

$$\text{or } \forall k \geq 1, \theta \frac{(1-\theta)^{k-1}}{k} = \frac{\theta}{1-\theta} \times \frac{(1-\theta)^k}{k} \text{ et } \sum_{k \geq 1} \frac{(1-\theta)^k}{k} \text{ converge}$$

absolument d'après 1.a).

Donc  $\frac{1}{X}$  admet une espérance et on a :

$$E^\theta\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{k \geq 1} \frac{(1-\theta)^k}{k} = \frac{-\theta}{1-\theta} \ln(1-\theta) \text{ d'après 1.d.)} \\ = \frac{\theta}{\theta-1} \ln(\theta)$$

donc par linéarité de l'espérance,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, E^\theta(T) = \frac{1}{n} n E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\theta \ln(\theta)}{\theta-1}$$

4.b) T est lui aussi une VAR, il est évaluable à partir des seules données de l'expérience, c'est donc un estimateur. équation tangente en 1

$$\log(T) = E^\theta(T|\theta) = \frac{\theta \ln(\theta) - \theta + 1}{\theta-1} \quad \theta > 0, \ln(\theta) \leq \theta - 1 \text{ par concavité} \\ \text{et } \theta - 1 < 0 \quad \text{de } \ln \text{ sur } ]0, +\infty[$$

donc comme  $\theta \neq 1$ ,  $\ln \theta < \theta - 1$  et  $\log(T) > 0$ .

5.a)  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P^\theta(X=x_i) = \prod_{i=1}^n (1-\theta)^{n_i-1} \theta = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n n_i - n}$$

$$\text{donc } \ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta)) = n \ln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^n n_i - n\right) \ln(1-\theta) \\ \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{d'où } \forall \theta \in \mathbb{R}, \ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta)) = n \ln(\theta) - (n - \sum_{i=1}^n n_i) \ln(1-\theta)$$

5.b) Quand les  $x_i$  ne sont pas tous égaux à 1,  $\sum_{i=1}^n n_i \neq n$ .

$\ln$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

Donc  $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta))$  et  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  atteignent leur maximum au(s) même(s) point(s).

on considère la fonction  $f: \theta \in \mathbb{R} \mapsto n \ln(\theta) + (n - \sum_{i=1}^n n_i) \ln(1-\theta)$

$$\text{dérivable sur } \mathbb{R} \text{ de dérivée } f'(\theta) = \frac{n}{\theta} - (n - \sum_{i=1}^n n_i) \times \frac{(-1)}{1-\theta}$$

$$= \frac{n(1-\theta) + n\theta - \theta \sum_{i=1}^n n_i}{\theta(1-\theta)}$$

$$= \frac{n - \theta \sum_{i=1}^n n_i}{\theta(1-\theta)}$$

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 12

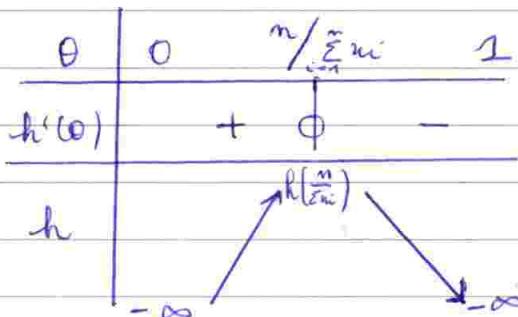
Session : 2020

## Épreuve de : Mathématiques 2

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{donc } h'(\theta) > 0 \Leftrightarrow m - \theta \sum_{i=1}^n x_i > 0 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{m}{\sum_{i=1}^n x_i} \in ]0, 1[.$$



Donc  $\frac{m}{\sum_{i=1}^n x_i}$  est l'unique valeur de  $\theta$  qui maximise  $h$ , donc  $h(L(x_1, \dots, x_n, \theta))$   
donc  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ .

$$\begin{aligned}
 6.a) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \geq n, \quad & \int_{1/\theta}^{k/n} \left( \frac{k}{n} - t \right) \frac{2}{t^3} dt = \frac{2k}{n} \int_{1/\theta}^{k/n} \frac{1}{t^3} dt + 2 \int_{1/\theta}^{k/n} \frac{-1}{t^2} dt \\
 & = \frac{2k}{n} \left[ -\frac{1}{2t^2} \right]_{1/\theta}^{k/n} + 2 \left[ \frac{1}{t} \right]_{1/\theta}^{k/n} \\
 & = -\frac{2k}{n} \times \frac{1}{2k^2} \times n^2 + \frac{2k}{n} 0^2 + 2 \frac{n}{\theta} - 2\theta \\
 & = \theta + \frac{2n}{k} - \frac{n}{k} + \frac{k\theta^2}{n} - \theta \\
 & = \frac{n}{k} - \theta + \theta^2 \left( \frac{k}{n} - \frac{1}{\theta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \geq n, \quad \frac{n}{k} - \theta - \theta^2 \left( \frac{k}{n} - \frac{1}{\theta} \right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left( \frac{k}{n} - t \right) \frac{2}{t^3} dt$$

6.b)  $U$  est une VAR, évaluable à partir des seules données de l'expérience donc  
 $U$  est un estimateur.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, b_\theta(U) = E^{\theta}(U - \theta)$   
On considère la VAR  $\sum_{i=1}^n X_i$  qui admet une espérance égale à  $\frac{n}{\theta}$ .  
 $(\sum_{i=1}^n X_i)(S2) = [I_{(n, +\infty)}]$

Par théorème de transfert, sans réserve d'existence, on a :

$$\begin{aligned}
 E^{\theta}(U) &= E^{\theta}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right) \\
 6.a) &= \underbrace{\theta \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right)}_{=1} - \underbrace{\frac{\theta^2}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} k P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right)}_{\stackrel{k \in \mathbb{N}}{= E^{\theta}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} + \underbrace{\theta \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right)}_{=1} \\
 &\quad + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3} dt. \\
 &= \theta - \frac{\theta^2}{n} \times \frac{n}{\theta} + \theta + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3} dt.
 \end{aligned}$$

donc  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $b_{\theta}(U) = \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3} dt$

6.c)  $\forall k \geq n$ ,  $P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right) > 0$ .

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $1/\theta > 0$  donc  $\forall t \in [\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}]$ ,  $\frac{2}{t^3} > 0$ .

. Si  $\frac{1}{\theta} \leq \frac{k}{n}$ , alors  $\frac{k}{n} - t > 0$  et  $\int_{1/\theta}^{k/n} (\frac{k}{n} - t) \frac{2}{t^3} dt \geq 0$ .

. Si  $\frac{1}{\theta} > \frac{k}{n}$  alors  $\frac{k}{n} - t \leq 0$  mais comme "les bornes ne sont pas dans le bon sens", on retrouve une intégrale positive.

Or comme  $k$  varie,  $\exists k_0 \geq n$ ,  $\frac{k_0}{n} \neq \frac{1}{\theta}$  donc  $\int_{1/\theta}^{k_0/n} (\frac{k_0}{n} - t) \frac{2}{t^3} dt > 0$  car la fonction intégrée est continue, positive, intégrée sur un segment non nul.

Ainsi,  $b_{\theta}(U)$  est une somme de termes positifs dont au moins un n'est pas nul.

Donc  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $b_{\theta}(U) > 0$ .

7. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$ .

D'après le lemme des coalitions, les  $\frac{1}{X_i}$  sont indépendants.

Ils suivent la même loi, ont une espérance.

Il faut montrer qu'ils admettent une variance donc montrons qu'ils admettent un moment d'ordre 2.

$$\forall k \geq 1, \frac{(1-\theta)^{k-1}\theta}{k^2} = \frac{\theta}{(1-\theta)} \times \frac{(1-\theta)^k}{k^2} \leq \frac{\theta}{1-\theta} \times \frac{(1-\theta)^k}{k}$$

donc par critère de comparaison pour les STG positifs,  
la STG  $\frac{(1-\theta)^{k-1}\theta}{k^2}$  converge absolument.

Donc d'après le théorème de transfert,  $E\left(\frac{1}{X_i}\right)$  existe donc  
les  $\frac{1}{X_i}$  admettent une variance.

On peut donc appliquer la loi faible des grands nombres à  $T_n$ .  
et on trouve que  $T_n \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{X_i}\right) = \frac{\theta \ln(\theta)}{\theta - 1}$

$U_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$ . on a également  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{\theta}$  avec la loi  
faible des grands nombres.

donc par continuité de  $n \mapsto \frac{1}{n}$  sur  $[0, +\infty]$ ,

$$U_n \xrightarrow{P} \frac{1}{1/\theta} = \theta.$$

### Partie III.

8.a)  $\forall \theta \in \Theta = [0, 1]$ ,

$$\forall (n_1, \dots, n_m) \in \{0, 1\}^m, L(n_1, \dots, n_m, \theta) = \prod_{i=1}^m P(X=n_i) = \prod_{i=1}^m \theta^{n_i} (1-\theta)^{1-n_i}.$$

en effet, si  $n_i=0$  alors  $P(X=n_i)=1-\theta$ .

$$\text{et } \theta^0 (1-\theta)^{1-0} = 1-\theta.$$

si  $n_i=1$  alors  $P(X=n_i)=\theta$

$$\text{et } \theta^1 (1-\theta)^{1-1} = \theta.$$

Donc  $\forall (n_1, \dots, n_m) \in \{0, 1\}^m$ ,

$$L(n_1, \dots, n_m, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^m n_i} \times (1-\theta)^{(\sum_{i=1}^m (1-n_i))}.$$

8.b) Ici  $S = \sum_{i=1}^m X_i$  donc  $S = S(X_1, \dots, X_m)$  avec  $S(n_1, \dots, n_m) = \sum_{i=1}^m n_i$ .

$$\text{on a donc } L(n_1, \dots, n_m, \theta) = \theta^{S(n_1, \dots, n_m)} \times (1-\theta)^{(m-S(n_1, \dots, n_m))}.$$

donc en posant

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad g(s(n_1, \dots, n_m), \theta) = \theta^{S(n_1, \dots, n_m)} (1-\theta)^{m-S(n_1, \dots, n_m)}$$

$$\text{et } h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad h(n_1, \dots, n_m) = 1$$

on a  $\forall \theta \in \Theta, \forall (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{R}^m, L(n_1, \dots, n_m, \theta) = g(s(n_1, \dots, n_m), \theta) h(n_1, \dots, n_m)$

donc  $S$  est exhaustive.

$$9.a) S = \sum_{i=1}^n X_i$$

donc si  $\sum_{i=1}^n n_i = k$ ,  $P_{[S=k]}^\theta ([X_1=n_1] \cap \dots \cap [X_n=n_n]) = 0$  ne dépend pas de  $\theta$

car si l'événement  $([X_1=n_1] \cap \dots \cap [X_n=n_n])$  est réalisé, on a  $S = \sum_{i=1}^n n_i = k$

• si  $\sum_{i=1}^n n_i = k$ ,

$$P_{[S=k]}^\theta ([X_1=n_1] \cap \dots \cap [X_n=n_n]) = \frac{P^\theta ([X_1=n_1] \cap \dots \cap [X_n=n_n] \cap [S=k])}{P^\theta ([S=k])} = \frac{P^\theta (\bigcap_{i=1}^n [X_i=n_i])}{P^\theta ([S=k])}$$

or les  $X_i$  sont indépendantes donc  $S \in B(n, \theta)$

$$= \frac{\theta^{(\sum n_i)} (1-\theta)^{n - \sum n_i}}{\binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}} = \frac{\theta^k (1-\theta)^{n-k}}{\binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}}$$

$$P_{[S=k]}^\theta ([X_1=n_1] \cap \dots \cap [X_n=n_n]) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \quad \text{ne dépend pas de } \theta.$$

$$9.b) \forall \theta \in \Theta, P_{[S=k]}^\theta ([X_1=1]) = \frac{P^\theta ([X_1=1] \cap [\sum_{i=2}^n X_i = k])}{P^\theta ([S=k])}$$

$$= \frac{P^\theta ([X_1=1] \cap [\sum_{i=2}^n X_i = k-1])}{P^\theta ([S=k])}$$

d'après le lemme des coalitions,  $X_1$  et  $\sum_{i=2}^n X_i$  sont indépendantes,

$$\text{donc } P_{[S=k]}^\theta ([X_1=1]) = \frac{\theta \times \binom{n-1}{k-1} \theta^{k-1} (1-\theta)^{n-k+1}}{\binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}} = \frac{k}{n} \quad \text{et } \sum_{i=2}^n X_i \sim B(n-1, \theta)$$

10.a)  $V \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , chaque coefficient de  $V$  est une Bernoulli de paramètre  $\theta$ .

Ainsi une colonne de  $V$  est une réalisation de  $n$  Bernoulli de paramètre  $\theta$ .

10.b)  $S \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ , chaque coefficient de  $S$  contient une Binomiale de paramètre  $(n, \theta)$ .

$K$  contient les coefficients de  $S$  égaux à  $k$  si lorsque

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 12

Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques 2

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

la réalisation de la loi  $\text{Bin}(n, \theta)$  a donné  $k=4$ .

Ainsi  $Y$  est la "sous-matrice" de  $U$  qui ne contient que les colonnes dont la somme des coefficients donne  $k$ .

donc les coefficients de  $Y$  fournissent "length(k)" simulations d'une loi conditionnelle du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  sachant l'événement  $[S=k]$ .

10.c) Tous les coefficients de  $M$  sont très proches de  $0,4 = \frac{k}{n}$ .  
Cela signifie que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P_{[S=k]}^{\theta}([X_i=1]) = \frac{k}{n}$

11.a)  $Y \in M_{n, \text{length}(k)}(\mathbb{R})$ .

donc  $Y^t Y \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ . d'où  $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ .

$$C(1,1) = \frac{\sum_{j=1}^{\text{length}(k)} (y_{1,j})^2 / \text{length}(k)}{\text{length}(k)} \text{ or } 0^2=0 \text{ et } 1^2=1$$

donc  $C(1,1) = \frac{1}{\text{length}(k)} \sum_{j=1}^{\text{length}(k)} y_{1,j} = \text{sum}(Y(1,:)) / \text{length}(k)$

11.b)  $C(1,2) = \frac{1}{\text{length}(k)} \sum_{j=1}^{\text{length}(k)} y_{1,j} \times y_{2,j}$  proche de 0 car  $y_{1,j}, y_{2,j} \in \{0,1\}$   
et  $y_{1,j} y_{2,j} = 1 \Leftrightarrow y_{1,j} = 1 \text{ et } y_{2,j} = 1$ .

de même pour tous les coefficients non diagonaux.

$$11.c) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C(i,j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\text{length}(k)} y_{ik} y_{jk} \times \frac{1}{\text{length}(k)} \stackrel{\text{les sommes sont finies.}}{=} \frac{1}{\text{length}(k)} \sum_{k=1}^{\text{length}(k)} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{ik} y_{jk} \right)$$

La somme des coefficients de  $C$  donne la moyenne des produits termes à termes entre 2 lignes de  $Y^t Y$  (je ne peux pas en dire plus).

Partie IV

12. a)  $T$  est estimateur sans biais de  $\theta$  donc  $E^\theta(T) = \theta$ .



$$12. b) \bigcup_{u \in S(B^*)} [S=u] = \Omega \text{ car}$$

Par définition de  $B$ ,  $P^q\left(\bigcup_{u \in S(B^*)} [S=u]\right) = 1$

Par ailleurs, si  $u \neq u'$  avec  $u, u' \in S(B^*)$ ,

$$[S=u] \cap [S=u'] = \emptyset$$

donc  $([S=u])_{u \in S(B^*)}$  est un SCE.

$$M.a) S = \sum_{i=1}^n X_i$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m$ ,

$$L(x_1, \dots, x_m, \theta) = \prod_{i=1}^m P^\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^m e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-nx} \theta^{\sum x_i} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^m x_i!}$$

donc en posant  $g: \begin{cases} S(\mathbb{N}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(x_1, \dots, x_m), \theta \mapsto e^{-nx} \times \theta^{\sum x_i} \end{cases}$

$$\text{et } h: \begin{cases} \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{R} \\ n_1, \dots, n_m \mapsto \frac{1}{\prod_{i=1}^m n_i!} \end{cases}$$

on a  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m, L(x_1, \dots, x_m, \theta) = g(s(x_1, \dots, x_m), \theta) \times h(x_1, \dots, x_m)$ .

Donc  $S = S(X_1, \dots, X_n)$  est exhaustive.

M.b) Par indépendance des  $(X_i)$  et par stabilité de la loi de Poisson,

$$S \sim P(n\theta)$$

$$P_{[S=u]}([X_1=x_1] \cap \dots \cap [X_n=x_n]) = \frac{P([X_1=x_1] \cap \dots \cap [X_n=x_n] \cap [S=u])}{P([S=u])}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \neq u \\ \frac{\prod_{i=1}^n P^\theta(X_i = x_i)}{e^{-nu} (n\theta)^u / u!} & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i = u \end{cases}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n P^\theta(X_i = x_i)}{e^{-nu} (n\theta)^u / u!} = \frac{e^{-nu} \theta^{\sum x_i} u!}{e^{-nu} n^u u! \theta^{\sum x_i} \prod_{i=1}^n x_i!} = \frac{(\sum x_i)!}{n^{\sum x_i} \prod_{i=1}^n x_i!}$$

donc la probabilité ne dépend pas de  $\theta$ .

M.c) Soit  $i \in \{1, n\}$ ,

• Avec la probabilité  $P_{[S=u]}^\theta$ ,  $X_i(\Omega) = [0, u]$ . car  $0 \leq X_i \leq \sum_{j=1}^n X_j = S = u$ .

•  $\forall k \in \{0, u\}$ ,  $P_{[S=u]}^\theta([X_i=k]) = \frac{P^\theta([X_i=k]) P^\theta([\sum_{j \neq i}^n X_j = u-k])}{P([S=u])}$  pour les mêmes raisons qu'en 9.b)

$$= \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} \times \frac{e^{-(n-\theta)} ((n-1)\theta)^{u-k}}{(u-k)!} \times \frac{u!}{e^{-nu} (n\theta)^u}$$

$$= \binom{u}{k} \left( \frac{\theta}{n\theta} \right)^k \left( \frac{(n-1)\theta}{n\theta} \right)^{u-k}$$

$$= \binom{u}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{u-k}$$

donc  $\forall i \in \{1, n\}, X_i \sim B(u, \frac{1}{n})$  sous la probabilité  $P_{S=u}^{\Theta}$

Par ailleurs, on a :  $P_{S=u}^{\Theta}([X_1=u] \cap [X_2=u]) = 0$ .

$$\bullet P_{S=u}^{\Theta}([X_1=u]) \times P_{S=u}^{\Theta}([X_2=u]) = \left(\frac{1}{n}\right)^u \times \left(\frac{1}{n}\right)^u = \left(\frac{1}{n}\right)^{2u} \neq 0.$$

donc les  $X_i$  ne sont pas indépendantes pour cette probabilité.

$$14.d) \forall \theta > 0, \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\theta u} \frac{(u\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{\theta}(S=k) = 1 \text{ avec } S \sim P(u\theta)$$

$$\text{donc } e^{-\theta u} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\theta u} \frac{(u\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k \frac{(u\theta)^k}{k!} = \theta e^{-\theta u}$$

$$\text{donc en posant } \forall k \in \mathbb{N}, \varphi_k = \theta, \text{ on a } \forall \theta > 0, \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \frac{(u\theta)^k}{k!} = \theta e^{-\theta u}.$$

Soit  $(\varphi'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , vérifiant aussi l'inégalité précédente.

$$\text{alors, } \sum_{k=0}^{+\infty} (\varphi'_k - \varphi_k) \frac{(u\theta)^k}{k!} = 0. = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\varphi'_k}{k!} - \frac{\varphi_k}{k!} \right) (u\theta)^k = 0.$$

la nullité en passant par une fonction  $f$  définie comme en 2.a) sur  $[-u\theta, u\theta]$ ,

la nullité de la somme donne d'après 2.d),  $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{\varphi'_k}{k!} - \frac{\varphi_k}{k!} = 0$ .

$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi'_k = \varphi_k = \theta$ .

d'où l'unicité.