Une semaine, un classique #13

EmLyon 2005

Les polynomes de Tchebychev

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = 2X \text{ et pour tout entier } n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x, $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

Partie I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

   (b) Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.

4. (a) Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$: $T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1;1[$, que l'on explicitera.

   (c) Établir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n(X) = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$