1. Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base canonique, f est diagonalisable si et seulement si :

- E admet une **base de vecteurs propres**
- A est semblable à une **matrice diagonale**
- La **dimension** de E est égale à la **somme des dimensions des sous-espaces propres**

2. Inégalité de Cauchy-Schwartz. Cas d'égalité.

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$$

On considère $\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \| \lambda x + y\|^2 = \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0$

On a un trinôme en λ positif pour tout λ donc Δ ≤ 0

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \iff \|x\|^2\|y\|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$$
$$\iff \|x\|.\|y\| \geq |\langle x, y\rangle|$$

Cas d'égalité **si et seulement si la famille est liée**

On suppose l'égalité, montrons que la famille est liée.

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\| \iff \Delta = 0$$

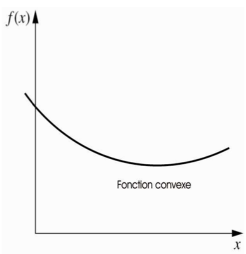
Le binôme admet une unique racine λ ∈ R telle que : $\|\lambda x + y\| = 0 \iff \lambda x + y = 0$

Donc la famille est liée.

On suppose que la famille est liée, montrons l'égalité.

Si (x,y) liée alors y = λy donc, $\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \|x\|.\|y\|$

3. Définition et propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle



Une fonction convexe est une fonction dont la représentation graphique donne une c**ourbe toujours au dessus de la tangente** et en **dessous de ses cordes**.

Soit ϕ une fonction convexe alors :
- $\phi'' > 0$
- Soit t $\in$ R, alors $\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$ et $\Phi'' > 0$

4. Enoncer l'inégalité et le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de variable réelle.

Inégalité :
Hypothèse : a<b ; f continue sur [a;b] ; dérivable sur]a;b[

$|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}| \leq M$ avec M majorant de la dérivée

Théorème : il existe $c \in R$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

5. Donner la valeur de $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Si X suit une loi normale centrée réduite alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-x^2}$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-x^2} dt = 1$

On pose $t = \frac{u}{\sqrt{2\pi}}$, changement de variable C^1 donc **licite** et applicable directement sur une intégrale généralisée.

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \frac{du}{2} = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6. Théorème du rang pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels

Soit $f \in L(E, F)$ alors **dim (Imf f) + dim (ker f) = dim (E)**

7. Définition et propriétés des endomorphismes symétriques

Si u est un endomorphisme symétrique de E, alors pour tout $y, x \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle u(y), x \rangle$

- La matrice de **u est diagonalisable en base orthonormée.**
- Les sous espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont **orthogonaux 2 à 2.**

8. Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

λ est valeur propre de f s'il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
Les valeurs de f sont des scalaires λ tels que f-λId soit **non injectif** $\iff Ker(f - id) \neq 0$
Soit λ valeur propre de A alors V_λ = Ker (A-λID) est **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

9. Théorème de Pythagore

Si $x \perp y$ alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Généralisation : $\{x_1, x_2, x_3, \dots . x_n\}$ sont orthogonaux 2 à 2 alors $\|\sum_{i=1}^{n}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$

10. Polynôme annulateur : définition et propriété

Définition :

$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \neq 0$ tel que $P(f) = 0$

$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ est **polynôme annulateur** de f si et seulement si Sp*(f) $=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n\}$

Propriété :

$sp(f)^* \subset racinedeP$

* = spectre de f

11.Énoncer la formule des probabilités totales

Sur le **système complet d'évènement** $(Y=k), k \in Y(\omega)$

$$P(X=n)=\sum_{k\in\omega} P_{(Y=k)}(X=n)P(Y=k)$$

12.Définition de la convergence d'une série réelle (condition nécéssaire et condition suffisante)

Une série est dite **convergente** si la suite de ses sommes partielles admet une limite. Dans le cas contraire on dit qu'elle **diverge**.

Condition nécessaire

$\lim_{x\to+\infty} U_n = 0$ avec U_n le terme général de la série. Sinon on dit qu'elle est trivialement divergente.

Condition suffisante

Théorème de Riemann.

On appelle série de Riemann toute série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ou α est un réel constant.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si α>1.

13.Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p applicable à une fonction définie sur R dérivable sur R

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-b)^n dt$$

14.Définition de la limite d'une suite réelle

- Vers l : **convergente**

On dit que la suite U_n converge vers le réel $l \in R$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les U_n à partir d'un certain rang

$\Longleftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$

$$U_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[\iff |U_n - \ell| < \varepsilon$$

- Vers $+\infty$: **divergente**

On dit que U_n tend vers $+\infty$ et on note U_n -> $+\infty$ si et seulement si pour tout $A \in R$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n ≥ N_0 U_n > A

On dit que U_n tend vers $-\infty$ et on note U_n -> $-\infty$ si et seulement si pour tout $a \in R$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n ≥ N_0 U_n < a