EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.

On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x \qquad \text{et} \qquad \theta : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto 0_E.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta,$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. **a.** Montrer que f n'est pas bijectif.

b. En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que :

$$u \neq 0_E \quad \text{et} \quad f(u) = 0_E.$$

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que :

$$v \neq 0_E \quad \text{et} \quad f^2(v) = -v.$$

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note : $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

b. Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(A,\, B,\, C)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \big\{aA + bB + cC\,;\, (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3\big\}.$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

8. Montrer : $\big\{M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})\,;\, CM = MC\big\} = \mathcal{F}$.

9. **a.** Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

b. En déduire une matrice M de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$.

Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et i.

• FIN •