Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

N6-00167
802886
Maths E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

Partie 1

1) f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale

2.a. f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ a fortiori $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Et, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 - 3y$

$\partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 3x$

2.b. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(x,y) est un point critique de f

$\iff \partial_1(f)(x,y) = \partial_2(f)(x,y) = 0$

$\iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x^2 = 3y \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = y \\ 3(x^2)^2 - 3x = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ 3x^4 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x = 0 \quad \text{et} \quad 0^2 = y) \\ \text{ou} \; (x = 1 \quad \text{et} \quad 1^2 = y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) = (0,0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (1,1)$$

Donc, $\boxed{f \text{ admet deux points critiques : } (0,0) \text{ et } (1,1)}$

3. d. f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
Et, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$\partial_{1,1}(f)(x,y) = 6x$
$\partial_{1,2}(f)(x,y) = -3$

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_{2,1}(f)(x,y) &\underset{(1)}{=} \partial_{1,2}(f)(x,y) = -3\\ \partial_{2,2}(f)(x,y) &= 6y.\end{aligned}}$$

(1) : d'après le théorème de schwarz

3.b. Formons la matrice hessienne de f en $(0,0)$

$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (-\lambda)^2 - (-3)\times(-3) = 0$

$\iff \lambda^2 - 9 = 0$
$\iff \lambda^2 = 9$
$\iff \lambda = 3$ ou $\lambda = -3$

Donc, $\nabla^2(f)(0,0)$ admet deux valeurs propres de signes opposés

Donc, <u>f admet un point col en $(0,0)$.</u>

Formons la matrice hessienne de f en $(1,1)$

$$\nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (6-\lambda)^2 - (-3)(-3) = 0$

$\Leftrightarrow 36 - 12\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow 27 - 12\lambda + \lambda^2 = 0$

Le discriminant associé à la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 12x + 27$ est :

$\Delta = (12)^2 - 4 \times 1 \times 27$
$= 144 - 108$
$= 36$

Ainsi, $x^2 - 12x + 27 = 0$ admet deux solutions $(\Delta > 0)$

$x_1 = \frac{12 - \sqrt{36}}{2} = 3$ $\quad$ $x_2 = \frac{12 + \sqrt{36}}{2} = 9$

Donc, $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres positives

Donc, par théorème, $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (1,1) \text{ de valeur } -1}$

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$f(x,y) - f(1,1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

Or, si $(x,y) = (-1,-1)$,

$f(-1,-1) - f(1,1) = -1 - 1 - 3(-1)(-1) - 1$
$= -2 - 3 - 1$
$= -6$

Or, $-6 < 0$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 39 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 _ I

4. $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$f(x,y) - f(1,1) < 0$$

Donc, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$f(x,y) < f(1,1)$$

Ainsi, $\boxed{(1,1) \text{ n'est par définition pas un extremum global de } f}$

Partie 2.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = f(x,1)$$
$$= x^3 + 1 - 3x$$
Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale

et, $g(x) = 3x^2 - 3$
$$= 3(x^2 - 1)$$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

Or, $x - 1 < 0 \iff x < 1$

Et, $x + 1 < 0 \iff x < -1$

Donc, $g'(x) > 0 \iff x \in]-\infty; -1[$ ou $x \in]1; +\infty[$

Et, $g'(x) < 0 \iff x \in]-1; 1[$

Ainsi, g est croissante sur $]-\infty ; -1]$
et sur $[1 ; +\infty[$
et, décroissante sur $[-1 ; 1]$

De plus, $g(1) = -1$
$g(-1) = 3$
Et, $g(x) = x(x^2 - 1) + 1$

Or, $x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

Et $x^2 \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

Donc, par produit et somme,
$\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$

Et, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$

De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale

Ainsi, en vertu du théorème de la bijection, g réalise une bijection
* croissante de l'intervalle $]-\infty ; -1]$ sur l'intervalle $]-\infty ; 3]$
* décroissante de l'intervalle $[-1 ; 1]$ sur l'intervalle $[-1 ; 3]$
* croissante de l'intervalle $[1 ; +\infty[$ sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$

Or, $\forall n \geq 4$, $n \notin]-\infty ; 3]$
$n \notin [-1 ; 3]$
$n \in [-1 ; +\infty[$

Donc, par théorème,

$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'équation } g(x) = m \text{ d'inconnue } x \\ \text{ne possède qu'une unique solution,} \\ \text{pour tout } m \geq 4\end{array}}$

6.a. g réalise une bijection croissante de l'intervalle $[1 ; +\infty[$ sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$

Donc, par définition,

h^{-1} est croissante.

Et, $h^{-1}(-1) = 1$

$\lim\limits_{+\infty} h^{-1} = +\infty$

Donc,

x	-1	$+\infty$
h^{-1}	1	$\nearrow$ $+\infty$

6.b. Soit $m \geq 4$

$g(u_m) = m$

Donc, $h(u_m) = m$

Donc, $u_m = h^{-1}(m)$

Or, $h^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Donc, $\boxed{\lim\limits_{m \to +\infty} u_m = +\infty}$

6.c. On a :

$g(u_m) = u_m^3 + 1 - 3u_m$

Or, $g(u_m) = m$

Donc, $u_m^3 + 1 - 3u_m = m$

Donc, $u_m(u_m^2 - 3) + 1 = m$

Donc, $\frac{u_m}{m}(u_m^2 - 3) + \frac{1}{m} = 1$

Donc, $\frac{g(u_n)}{n} = 1$

Donc, par théorème,

$$g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n$$

Or, $g(u_n) = u_n^3 + 1 - 3u_n$
$= u_n(u_n^2 - 3) + 1$

Et, $\frac{u_n}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \frac{1}{u_n^2 - 3}$

$= 1 - \frac{1}{n(u_n^2-3)}$

Donc, $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc, $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$

Exercice 2

1.a. * f est correctement définie sur $\mathbb{R}$
* f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
* $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ a fortiori $\mathbb{R}^{+*}$
* $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ a fortiori $\mathbb{R}^{+*}$ a valeur dans $\mathbb{R}$
* $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc, par composition puis produit, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Et, f est continue sur $\mathbb{R}^-$ car identiquement nulle.

* f est positive sur $\mathbb{R}$

$\forall x > 0, \frac{2}{x^3} > 0$

Et, $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc, par produit et composition, $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 39	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1. a. Et, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^-$

* Montrons que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge de valeur 1.

- $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$
- Soit $A \geq 1$,

$$\int_1^A f(t)\,dt = \int_1^A \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt$$
$$= \left[-e^{-\frac{1}{t^2}}\right]_1^A$$
$$= e^{-\frac{1}{A^2}} - e^{-1}$$

Or, $-\frac{1}{A^2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

Et, $e^x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Donc, par composition puis produit,
$$e^{-\frac{1}{A^2}} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$$

Donc, $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A f(t)\,dt$ existe est finie et vaut $1 - e^{-1}$

. Soit $B \leq 1$

$$\int_B^1 f(t)\,dt = \int_B^1 \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$$
$$= \left[- e^{-\frac{1}{x^2}} \right]_B^1$$
$$= e^{-1} - e^{-\frac{1}{B^2}}$$

Or, $-\frac{1}{B^2} \xrightarrow[B \to 0^+]{} -\infty$

Et, $e^{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Donc, par composition puis produit, $\lim\limits_{B \to 0} \int_B^1 f(t)\,dt$ existe est finie et vaut e^{-1}

Donc, par théorème, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Et, d'après la relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité d'une variable aléatoire}}$

1.b. Raisonnons par disjonction de cas.
(Par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ avec f une densité de Y)

• 1er cas : $x \leq 0$

Alors, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

Donc, $F(x) = 0$

• 2ème cas : $x > 0$

Alors, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

Soit $B \leq x$,

$\int_{B}^{x} f(t)\,dt = \left[-e^{-\frac{1}{t^2}}\right]_{B}^{x}$

$= -e^{-\frac{1}{B^2}} + e^{-\frac{1}{x^2}}$

Or, $e^{-\frac{1}{B^2}} \xrightarrow[B \to 0^+]{} 0$

Donc, $\lim\limits_{B \to 0} \int_{B}^{x} f(t)\,dt$ existe

est finie et vaut $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Donc, $F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Ainsi, $\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

2. a. • g est correctement définie sur $\mathbb{R}$

• g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1

($x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

a fortiori $[1 ; +\infty[$)

- g est positive sur $\mathbb{R}$,
  $\forall x < 1$, $g(x) = 0$
  et, $\forall x \geq 1$, $\frac{2}{x^3} > 0$
- Montrons que : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge

de valeur 1.

$*$ $\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt = 0$

$*$ Soit $A \geq 0$,

$$\int_1^A g(t)\,dt = \int_1^A \frac{2}{x^3}\,dx$$
$$= \left[-x^{-2}\right]_1^A$$
$$= -A^{-2} + 1$$

Or, $-A^{-2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

Donc, par somme,
$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A g(t)\,dt$ existe
est finie et vaut 1

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge

de valeur 1 (d'après la relation de Chasles)

Donc, $\boxed{\text{g est une densité d'une variable aléatoire}}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 39 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Execice 2

2.b. Par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$

* 1^{er} cas : $x < 1$

Alors $\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = 0$

Donc, $G(x) = 0$

* $2^{ème}$ cas : $x \geq 1$

Alors, $G(x) = \int_{1}^{x} g(t)\,dt$

$= \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}\,dt$

$= \left[t^{-2} \right]_{1}^{x}$

$= 1 - x^{-2}$

$= 1 - \frac{1}{x^2}$

Donc, $\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3.a. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]\right) \\ &\underset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &\underset{(2)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 \leq x) \\ &= \left(\mathbb{P}(X_1 \leq x)\right)^n \\ &= \left(G(x)\right)^n\end{aligned}$$

(1) : par mutuelle indépendance des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

(2) : car les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi.

Ainsi, $\boxed{G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$

3.b. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) &= \mathbb{P}(M_n \leq x\sqrt{n}) \\ &= G_n(x\sqrt{n}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{\sqrt{n}} < 1 \\ \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } \frac{x}{\sqrt{n}} \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1-\frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^-$

Alors, $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Et, $f_n(x) = 0$, $\forall x < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0}$

5. a. $\forall n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$

Alors, $\frac{1}{x^2} < n$

Donc, $x^2 > \frac{1}{n}$

Donc, $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc, $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ainsi, $\boxed{\forall n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor,\ x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \text{Et},\ f_n(x) = \left(1-\frac{1}{nx^2}\right)^n}$

5.6. On a :

$$\boxed{\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u}$$

Or, $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$

$= e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)}$

Et, $-\frac{1}{nx^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc, $\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n(x^2)}$

par théorème

Donc, par produit,

$n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$

Or, $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1}{x^2}$

Donc, par théorème,

$n\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1}{x^2}$

Or, $e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{x^2}}$

Donc, $e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{x^2}}$

Donc, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}}$

6. Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq \left(\frac{1}{x^2}\right) \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } n \geq \left(\frac{1}{x^2}\right) \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc, <u>par théorème</u>,

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable

Code épreuve : 299	**Nombre de pages :** 39	**Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Exercice 2

6. $\boxed{\text{aléatoire dont la loi est celle de } \varphi}$

Exercice 3

1. a. M_a est une matrice triangulaire

Donc, par théorème, les valeurs propres de M_a sont ses coefficients diagonaux

Ainsi, $\boxed{Sp(M_a) = \{1 ; a\}}$

1. b. * Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$M_a X = X \iff \begin{cases} x = x \\ (1-a)x + ay = y \\ (1-a)y + az = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-a)x = (1-a)y \\ (1-a)y = (1-a)z \end{cases}$$

$$\underset{(1)}{\iff} \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) : car $a \in]0 ; 1[$ Donc, $a - 1 \neq 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, $\boxed{E_1(M_a) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$

* Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$M_a X = aX \iff \begin{cases} x = ax \\ (1-a)x + ay = ay \\ (1-a)y + az = az \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ ay = ay \\ (1-a)y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = y = 0 \end{cases}$

$\iff X = z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc, $\boxed{E_a(M_a) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$

1.c. D'après 1.b,

$E_a(M_a) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$E_1(M_a) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Or, $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ne comportent qu'un unique vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ⊛

Donc, $\dim(E_a(M_a)) = 1$

$\dim(E_1(M_a)) = 1$

(*) Donc, par théorème,
$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ sont libres
dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
Libres et génératrices, ce sont des bases respectivement de $E_1(M_a)$ et $E_a(M_a)$

Ainsi, $\sum_{\lambda \in Sp(M_a)} \dim(E_\lambda(M_a)) = 2$

Or, $M_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Donc, par théorème,
$\boxed{M_a \text{ n'est pas diagonalisable}}$

2. a. On a :
$$E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\(1-a)&a&0\\0&(1-a)&a\end{pmatrix}, M_a^2\right)$$

Or, $M_a^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1-a&a&0\\0&(1-a)&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1-a&a&0\\0&(1-a)&a\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\(1-a+a(1-a))&a^2&0\\(1-a)^2&a(1-a)+a(1-a)&a^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\1-a^2&a^2&0\\(1-a)^2&2a(1-a)&a^2\end{pmatrix}$$

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$
Supposons que :
$$\lambda I + \mu M_a + \nu M_a^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
Alors, $\begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu&0&0\\\mu(1-a)+\nu(1-a^2)&\lambda+a\mu+a^2\nu&0\\\nu(1-a)^2&\mu(1-a)+\nu(1-a)&\lambda+a\mu+a^2\nu\end{pmatrix} = 0$

Donc, $\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0\\ \mu(1-a)^2=0\\ \mu(1-a)+\nu(1-a)=0\end{cases}$

Donc, $\mu = \nu = \lambda = 0$

Donc, la famille (I, M_a, M_a^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Libre et génératrice,

(I, M_a, M_a^2) est une base de E

comportant 3 vecteurs de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Donc, $\boxed{\dim(E) = 3}$

2.b. $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Donc, $\boxed{JK^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$

Or, $M_a - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1-a) & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$

$= (1-a) J$

Et, $M_a - aI = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$

$= (1-a) K$

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

2.b. Donc, $(M_a - I)(M_a - aI)^2$

$$= (1-a)J\,(1-a)^2K^2$$
$$= (1-a)^3 JK^2$$
$$= (1-a)\,0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
$$= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Donc, $\boxed{(M_a - I)(M_a - aI)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$

2.c. $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I)$

$$= M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2 M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2 I$$
$$= M_a^3 - (1+2a)M_a^2 + (a^2+2a)M_a - a^2 I$$

Or, $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Donc, $M_a^3 = (1+2a)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2 I$

Donc, M_a^3 s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de E

Donc, $\boxed{M_a^3 \in E}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. a. On a :

$$M_a^3 = (1+2a)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I$$

On a :

$$I = 0 M_a^2 + 0 . M_a + 1 I$$
$$M_a = 0 M_a^2 + 1 . M_a + 0 I$$
$$M_a^2 = 1 M_a^2 + 0 . M_a + 0 . I$$

Montrons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n " $\exists ! (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$ "

* Initialisation : $M_a^0 = I$

Ainsi, $\exists ! (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3$
et, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ $w_0 = 1$
tel que : $u_0 M_a^2 + v_0 M_a + w_0 I = I$

Donc, P_0 est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$
Supposons que P_n est vraie
Montrons que P_{n+1} est vraie
Par hypothèse de récurrence,
$\exists ! (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3$
tel que :
$$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$$
Or, $M_a^{n+1} = M_a^n M_a$

Donc, $M_a^{n+1} = (u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I) M_a$

$$= u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a$$
$$= u_n((1+2a) M_a^2 - a(a+2) M_a + a^2 I)$$
$$+ v_n M_a^2 + w_n M_a$$
$$= (1+2a)u_n M_a^2 - (a+2)a u_n M_a + a^2 u_n I$$
$$+ v_n M_a^2 + w_n M_a$$

Donc, si on pose :

$$u_{n+1} = (1+2a)u_n + v_n$$
$$v_{n+1} = -(a+2)a u_n + w_n$$
$$w_{n+1} = a^2 u_n$$

Alors, $M_a^{n+1} = u_{n+1} M_a^2 + v_{n+1} M_a + w_{n+1} I$

* Conclusion : en vertu du principe de récurrence, P_n est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc, $\exists ! (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$
et, $u_0 = v_0 = 0 \quad w_0 = 1$
et, $\begin{cases} u_{n+1} = (1+2a)u_n + v_n \\ v_{n+1} = -(a+2)a\, u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3. b. Après la ligne où il est écrit "u=(2*a+1)*u+v", u prend cette valeur et donc, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $u = u_{k+1}$
Donc, "v=-a*(a+2)*u+w et w=a*a*u" calcule avec le terme u_{k+1} et non u_k
Donc, $v_{k+1} = -(a+2)a\, u_{k+1} + w_k$ dans ce code scilab.

3. c.

```
n = input ('entrez une valeur pour n:')
a = input ('entrez une valeur pour a:')
u=0
v=0
w=1
for k=1:n
aux = u
u = (2*a+1)*u+v
v = -a*(a+2)*aux + w
w = a*a*aux
```

```
end
disp(w, v, u)
```

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+3} = (1+2a)\, u_{n+2} + v_{n+2}$

Or, $v_{n+2} = -a(a+2)\, u_{n+1} + w_{n+1}$

Et, $w_{n+1} = a^2 u_n$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = (2a+1)\, u_{n+2} - a(a+2)\, u_{n+1} + a^2 v_n}$

5. $$u_n = \frac{(n-1)a^n - n a^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{a^{n-1}\left((n-1)a - n\right) + 1}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{a^{n-1} n\left(\frac{n-1}{n} a - 1\right) + 1}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{a^{n-1} n\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)a - 1\right) + 1}{(a-1)^2}$$

Or, $a \in]0;1[$

Donc, par croissance comparée,

$$a^{n-1} n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Et, $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc, par produit puis somme puis produit,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{(a-1)^2}}$$

Or, $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admet la même limite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par unicité de la limite

De la même façon, $(w_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admettent la même limites

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 39 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 3.

5.a. Donc, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Et, } \lim_{n\to+\infty} v_n &= \frac{-(a+2)a}{(a-1)^2} + \frac{a^2}{(a-1)^2} \\ &= \frac{-(a+2)a + a^2}{(a-1)^2}\end{aligned}}$$

5.b. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) I$$

Donc, $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2} I + \frac{(-a+2)a + a^2}{(a-1)^2} M_a}$$

Et, $$L_a = \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2} I + \frac{2a}{(a-1)^2} M_a$$

$$L_a^2 = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1-a^2}{(a-1)^2} & \frac{a^2}{(a-1)^2} & 0 \\ \frac{(1-a)^2}{(a-1)^2} & \frac{2a(1-a)}{(a-1)^2} & \frac{a^2}{(a-1)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^2}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(a-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{(a-1)^2} \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \frac{2a}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{2a(1-a)}{(a-1)^2} & \frac{2a^2}{(a-1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2a(1-a)}{(a-1)^2} & \frac{2a^2}{(a-1)^2} \end{pmatrix} \right)^2$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= La$

c. Ainsi, $\boxed{La^2 = La}$

6. a. Soit $x \in \ker(fa - Id)$,

On a :

$\varphi a(x) - x = (\varphi a - Id)(x)$

Or, $x \in \ker(fa - Id)$

Donc, $(fa - id)(x) = 0$

Donc, $fa(x) = x$

Donc, $\varphi a(x) - x = (\varphi a - Id)(fa(x))$

Donc, Par injectivité de Mat_B,

$Mat_B((\varphi a)(x)) = La\, Mat_B(x)$

Et, $Mat_B(x) = Mat_B(fa(x))$

$= Ma \cdot Mat_B(x)$

Or, $fa(x) = x$

Et, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,$

$fa^n(x) = \varphi a(x)$ d'après 5.

Donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,$

$fa^n(x) = x$

Donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$\varphi a(x) = x$

Donc, $\boxed{\forall x \in \ker(fa - Id), \varphi a(x) = x}$

5. b. Soit $x \in Im(fa - Id)$
Alors, $\exists y \in \mathbb{R}^3, (fa - Id)(y) = x$

Donc, $fa(y) - y = x$

Donc, $\varphi a(fa(y) - y) = \varphi a(x)$

Or, $\varphi a(fa(y) - y) = \varphi a(fa(y)) - \varphi a(y)$

~~Donc, par injectivité de Mat_B~~,
Or,
$$La\,Ma\,Y - La\,Y$$
$$= La^2 Y - La\,Y$$
$$= 0_{M_3(\mathbb{R})} Y$$
$$= 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

Donc, par injectivité de Mat_B,
$\varphi a(fa(y) - y) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc, $\varphi a(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in Im(fa - Id), \varphi a(x) = 0}$

Problème — I

1. a. On reconnaît le schéma d'une géométrique
Par hypothèse, X_1 (resp. Y_1) est le rang d'obtention du 1er succès ("obtenir pile") suite à la répétition d'une infinité d'épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes où la probabilité de succès à chaque tirage est p.

Ainsi, $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

Par théorème, $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^* = Y_1(\Omega)$

Or, "la 1ère manche dure éternellement" est réalisé

$\Longleftrightarrow$ $[X_1 = 0]$ et $(Y_1 = 0)$ sont réalisés.

Ainsi, $\boxed{\text{il est quasi impossible que la 1ère manche dure éternellement}}$

1.b. E_1 est réalisé

$\Longleftrightarrow$ $[X_1 = Y_1]$ est réalisé.

(Ainsi, $\boxed{E_1 = [X_1 = Y_1]}$)

$\Longleftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $(X_1 = k)$ et $[Y_1 = k)$ sont réalisés.

Donc, $\boxed{E_1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left([X_1 = k) \cap [Y_1 = k] \right)}$

1.c. D'après 1.c,
et par incompatibilité des évènements
$\left((X_i = k] \cap (Y_1 = k] \right)_{i \in \mathbb{N}^*}$,

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_1 = k] \cap [Y_1 = k] \right)$$

$$\underset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\, \mathbb{P}(Y_1 = k)$$

(1) : par indépendance de X_1 et Y_1

Problème.

1.c. Donc,

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\, p(1-p)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)}$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1}$$

$$\underset{(1)}{=} p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j$$

$$= p^2 \frac{1}{1-q^2}$$

$$= \frac{p^2}{1-q^2}$$

(1) : on effectue le changement d'indice par translation " $j = k-1$ ".

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{p^2}{1-q^2}}$

1.d. G_1 (resp H_1) est réalisé
$\iff$ A (resp B) gagne à ce jeu
Or, à chaque tirage,
A et B ont la même probabilité

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

de succes.

Donc, $\boxed{G_1 \text{ et } H_1 \text{ sont équiprobables.}}$

On a :

$$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(H_1)$$

Or, E_1 est réalisé
$\Leftrightarrow$ G_1 n'est pas réalisé
et H_1 n'est pas réalisé

Donc, $E_1 = \overline{G_1} \cap \overline{H_1}$

Donc, $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(\overline{G_1} \cap \overline{H_1})$
$= \mathbb{P}(\overline{G_1})\,\mathbb{P}(\overline{G_1})$
$= 2\mathbb{P}(\overline{G_1})$
$= 1 - 2\mathbb{P}(G_1))$

Et, $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{p^2}{1-q^2}$

Donc, $\dfrac{p^2}{1-q^2} = 1 - 2\mathbb{P}(G_1))$

Donc, $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{p^2}{2(1-q^2)}$

Donc, $\boxed{\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{p^2}{2(1-q^2)}}$

2.a. Soit $n \geq 2$,

G_n est réalisé

$\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, E_k est réalisé et, $(X_n < Y_n)$ est réalisé

Donc, $\boxed{G_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} E_k \cap (X_n < Y_n)}$

2.b. Soit $k \geq 2$,

a

$$\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) \underset{(1)}{=} \mathbb{P}(E_1) \quad \dots$$
$$= \frac{p^2}{1-q^2}$$

(1) : car : sachant $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ réalisé, E_k est réalisé $\Leftrightarrow$ il y a égalité à la fin de la k-ième manche

Or, à chaque manche, il y a la même probabilité d'avoir une égalité.

Ainsi, $\forall n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap \mathbb{P}(X_1 < Y_1)$$
$$\underset{(1)}{=} \mathbb{P}(E_1)\, \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-2} E_k}(E_{k-1})\, \mathbb{P}(X_1 < Y_1)$$
$$= \left(\frac{p^2}{1-q^2}\right)^{n-1} \mathbb{P}(G_1)$$
$$= \left(\frac{p^2}{1-(1-p)^2}\right)^{n-1} \mathbb{P}(G_1)$$
$$= \left(\frac{p^2}{1-(1-2p+p^2)}\right)^{n-1} \mathbb{P}(G_1)$$
$$= \left(\frac{p^2}{2p+p^2}\right)^{n-1} \mathbb{P}(G_1)$$

$$= \left(\frac{p}{1+(1-p)}\right)^{n-1} \mathbb{P}(G_1)$$

$$= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2(1+q)}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \left(\frac{1+q-p}{2(1+q)}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \left(\frac{2q}{2(1+q)}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}}$

2.c. On a :

$$\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q}$$

Or, $\mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$

Donc, $\boxed{\text{le résultat précédent est valable pour } n = 1}$

2.d. G est réalisé

$\iff \exists k \in [\![1, +\infty[\![$ tel que : G_k est réalisé

Donc, $\boxed{G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k}$

Donc, $\mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k)$

Partie I - Problème.

2.d.
$$\mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{k-1} \frac{q}{1+q}$$

$$= \frac{q}{1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{j}$$

$$= \frac{q}{1+q} \; \frac{1}{1-\frac{p}{1+q}}$$

$$= \frac{q}{1+q} \; \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}}$$

$$= \frac{q}{1+q-(1-q)}$$

$$= \frac{q}{2q}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc, $\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. a. H est réalisé

$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![1;+\infty[\![$ tel que G_k est réalisé

$\underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \exists k \in [\![1;+\infty[\![$ tel que H_k est réalisé

(1) : par équiprobabilité des évènements G_k et H_k, $\forall k \in [\![1;+\infty[\![$

Donc, $\mathbb{P}(H) = \frac{1}{2}$

Or, $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\bar{G} \cap \bar{H})$

$\underset{(2)}{=} 1 - \mathbb{P}(G \cup H)$

$= 1 - \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H)$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 0$

(2) : d'après les lois de Morgan

Donc, $\boxed{\mathbb{P}(E) = 0}$

Partie 3

7.
```
if X<Y+1|Y<X+1 then disp('A gagne le deuxième jeu')
else disp('B gagne le deuxième jeu')
end
```

6. p = input ('entrez une valeur pour p')
```
c = 1
x = grand (1, 1, 'geom', p)
y = grand (1, 1, 'geom', p)
while x == y
    x = grand (1, 1, 'geom', p)
    y = grand (1, 1, 'geom' p)
    c = c + 1
end
if x < y then disp ('A gagne le premier jeu')
    else disp ('B gagne le premier jeu')
end
disp(c)
```

Partie 2.

3.a. $\{[X_1 = i], i \in \mathbb{N}^*\}$ forme un système complet d'évènement ($X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$)

Et, d'après la formule des probabilités totales appliquée relativement à ce système,

$$\mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = X_1 + 1])$$

(1) : par indépendance de X_1 et Y_1

$$\underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \mathbb{P}(Y_1 = i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{i}$$

$$= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-1}$$

$$= p^2(1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{i-1}$$

$$= p^2(1-p) \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j$$

$$= p^2(1-p)\frac{1}{1-q^2}$$
$$= \frac{p^2 q}{1-q^2}$$
$$= \frac{pq}{1+q}$$

Donc, $\boxed{\mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{pq}{1+q}}$

3.6. Notons V_k : " l'un des deux joueurs gagne à la k-ième manche par un lancer d'écart " $\forall k \in \mathbb{N}^*$

V_1 est réalisé

$\Longleftrightarrow$ $[Y_1 = X_1 + 1]$ ou $[X_1 = Y_1 + 1]$ est réalisé

Donc, $V_1 = [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]$

Donc, $v \underset{(1)}{=} \mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) + \mathbb{P}(X_1 = Y_1 + 1)$
$$\underset{(2)}{=} 2\mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1)$$
$$= \frac{2pq}{1+q}$$

(1) : par incompatibilité des évènements $[Y_1 = X_1 + 1]$ et $[X_1 = Y_1 + 1]$

(2) : car X_1 et Y_1 suivent la même loi

Donc, $\boxed{v = \frac{2pq}{1+q}}$

Code épreuve : 898 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème Partie 2

4.a K_n est réalisé

$\iff$ $\forall k \in [\![1 ; n-1]\!]$, E_k est réalisé et, V_n est réalisé

$$\boxed{K_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap V_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

4.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(K_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \mathbb{P}(V_n)$$

$$= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(K_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}}$

5. K est réalisé

$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![1, +\infty[\![$ tel que : K_k est réalisé

Donc, $$\mathbb{P}(K) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(K_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{k-1} \frac{2pq}{1+q}$$

$$= \frac{2pq}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{2pq}{1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{j}$$

$$= \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{1-\frac{p}{1+q}}$$

$$= \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}}$$

$$= \frac{2pq}{1+(1-p)-p}$$

$$= \frac{2pq}{2-2p}$$

$$= \frac{2pq}{2q}$$

$$= p$$

Donc, $\boxed{\mathbb{P}(K) = p}$

Exercice 3

5. b.

$$L_a^2 = \left(\frac{1}{(a-1)^4}\begin{pmatrix} 1+a^2+2a & 0 & 0 \\ (1-a^2)a^2+2a(1-a) & 2a^2+a^2+a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a)+2a(1-a) & a^2+a^2+2a^2 \end{pmatrix}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(a-1)^4}\begin{pmatrix} 1+a^2+2a & 0 & 0 \\ -a^4-a^2+2a & 4a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 4a(1-a) & 4a^2 \end{pmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{(a-1)^4}\begin{pmatrix} (1+a^2+2a)(a-1)^2 & 0 & 0 \\ (-a^4-a^2+2a)(a-1)^2 & 4a^2(a-1)^2 & 0 \\ (1-a)^2(a-1)^2 & 4a(1-a)(a-1)^2 & 4a^2(a-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= L_a$$

Donc, $\boxed{L_a^2 = L_a}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751