

PREPA 2021 - ECE - Economique

Mathématiques option économique

BEN MAHMOUD

MEHDI

Note de délibération : 19.3 / 20

Numéro d'inscription

Signature



Né(e) le

Nom

B E N Π A Η Π Ο Υ Δ

Prénom(s)

Π Ε Η Δ Ι

19.3 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 /

Numéro de table 1 5

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 1:

Partie A:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha I_3 \in A$ si et seulement si: $\alpha I_3(\alpha I_3 + I_3)$

$$\alpha I_3(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = 0$$

$$\alpha I_3(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(1+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1+\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(1+\alpha)(2+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1+\alpha)(2+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1+\alpha)(2+\alpha) \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour que $\alpha I_3 \in A$, alors $\alpha(1+\alpha)(2+\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } 1+\alpha = 0 \text{ ou } 2+\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \text{ ou } \alpha = -2$$

Ainsi, $S = \{-2; -1; 0\}$

2) $E \subset \Pi_3(\mathbb{R})$

$0(0+I_3)(0+2I_3) = 0$, donc $0 \in E$, donc E est non vide

Soit $(M, N) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\lambda M + \mu N)(\lambda M + \mu N + I_3)(\lambda M + \mu N + 2I_3) \neq 0$$

Donc A n'est pas un sous-espace vectoriel de E

$$3) a) Bx_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2x_1$$

$$Bx_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -x_2$$

b) On remarque que $Bx_1 = -2x_1$. Or $x_1 \neq 0$, donc $-2 \in \text{sp}(B)$

De même, $Bx_2 = -x_2$. Or $x_2 \neq 0$, donc $-1 \in \text{sp}(B)$

Ainsi, $E_{-2}(B) = \text{Vect}(x_1)$

Et, $E_1(B) = \text{Vect}(x_0)$

c) Si on appelle C_1, C_2 et C_3 ces colonnes respectives de B , on remarque que :

$$C_2 = -2C_3 - C_1$$

Ainsi, B n'est pas inversible. Comme B n'est pas inversible, cela signifie que $0 \in \text{sp}(B)$

Ainsi, $\text{sp}(B) = \{-2; -1; 0\}$

B est donc une matrice carrée d'ordre 3 qui comporte 3 valeurs propres. Donc, B est diagonalisable.

Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 :

Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$Bx = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$-x - y + z = 0$$

$$-4y + 2z = 0 \quad l_2 \leftarrow l_1 + l_2$$

$$-2y \quad l_3 \leftarrow l_1 + l_3$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi_{3,1}(\mathbb{R})$

$$0x = -2x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = -2x \\ x - 3y + z = -2y \\ x - y - z = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


Les 2 vecteurs ne sont pas colinéaires, donc
 $E_2(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et $\dim E_2(B) = 2$

$$0x = -x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = -x \\ x - 3y + z = -y \\ x - y - z = -z \end{cases}$$

Numéro d'inscription

5 0 1 3 8 1

Signature 

Né(e) le

1 4 / 1 2 / 2 0 0 1

Nom

Β Ε Ν Π Α Η Π Ο Ο Δ

Prénom (s)

Π Ε Η Ο Ι

19.3 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 /

Numéro de table 1 5

Commencez à composer dès la première page.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ x - y = 0 \quad C_3 \leftarrow C_1 - C_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x + 2y \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\underline{\underline{E_1(B) = \text{Vect}(X_2)}}$ et $\dim E_1(B) = 1$

$$c) \dim E_{-1}(B) + \dim E_{-2}(B) = 2 + 1 = 3$$

Or, B est une matrice carrée d'ordre 3 dont la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3. Donc B est diagonalisable.

Puisque B est diagonalisable, la concaténation des vecteurs propres de B forme une base B' composée de sous-espaces propres de B . Si on appelle P la matrice de passage de la base ~~canonique~~ base canonique à la base B' :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base nous donne : $B = PDP^{-1}$

$$d) 0(D + I_3)(D + 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{O_3}}$$

Donc D $\in \mathcal{A}$

$$B(B+I_3)(B+2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{O_3}}$$

Donc B $\in \mathcal{A}$

6) Le spectre de T est inclus dans $\{0; -1; -2\}$, donc cela signifie que soit $T+I_3 = O_3$ ou que $T+2I_3$

Partie B:

$$5) \pi \in \mathcal{A}, \text{ donc : } \pi(\pi + \mathbb{I}_3)(\pi + 2\mathbb{I}_3) = \mathbb{O}_3$$

Ainsi, $P(x) = x(x+1)(x+2)$

P est un polynôme annulateur de π

Les valeurs propres possibles de π sont les racines de P :

$$P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \text{ ou } x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -2$$

Ainsi, les valeurs propres possibles de π sont $-2, -1$ et 0 , donc le spectre de π est bien inclus dans $\{0, -1, -2\}$

6) $\pi \in E$, or E est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 ^{à coefficients réels}. Donc π est une matrice carrée d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres. Donc π est diagonalisable

7) a) Comme -1 est l'unique valeur propre de π , cela signifie que $\pi - \mathbb{O}_3 = \pi$ est inversible et que $\pi + 2\mathbb{I}_3$ est aussi inversible, puisque 0 et -2 ne sont pas valeurs propres de π , et on sait que $\lambda \in \text{sp}(\pi)$ si et seulement si $\pi - \lambda \mathbb{I}_n$ est pas inversible

Numéro d'inscription

5 0 1 3 8 1

Né(e) le

14 / 12 / 2001

Signature



Nom

B E N M A H O U D

Prénom(s)

M E H O I

19.3 / 20

Ecritome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

 3 /

Numéro de table

 15

Commencez à composer dès la première page

-1 est l'unique valeur propre de π , donc : $\pi + I_3$ n'est pas inversiblePuisque π et $\pi + 2I_3$ sont inversibles on a :

$$\pi(\pi + I_3)(\pi + 2I_3)^{-1} = O_3$$

$$\Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi + I_3)(\pi + 2I_3)(\pi + 2I_3)^{-1}\pi^{-1} = \Leftrightarrow \pi^{-1}O_3(\pi + 2I_3)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (\pi + 2I_3) = O$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\pi = -2I_3}}$$

b) si $\text{sp}(\pi) = \{-2\}$, on peut en déduire que π et $(\pi + I_3)$ sont inversibles et donc que

$$\pi = -2I_3$$

De même si $\text{sp}(\pi) = \{0\}$, on peut en déduireque $(\pi + I_3)$ et $(\pi + 2I_3)$ sont inversibles et que

$$\pi = O_3$$

8) Puisque π n'admet aucune valeur propre :On sait que $\lambda \in \text{sp}(\pi)$ si et seulement si $\pi - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Or π n'a pas de valeurs propres, ce qui signifie donc que $\pi - O_3 = \pi$, $(\pi + I_3)$ et $(\pi + 2I_3)$ ne sont pas inversibles.

Si ces 3 matrices n'étaient pas inversibles alors Π aurait eu pour valeur propres 0, -1 et -2.

9) a) On sait que Π appartient à \bar{E} , donc :

$$\Pi(\Pi + I_3)(\Pi + 2I_3) = O_3$$

$$\Leftrightarrow \Pi^{-1}\Pi(\Pi + I_3)(\Pi + 2I_3) = \Pi^{-1}O_3 \quad \text{car } 0 \notin \text{sp}(\Pi), \text{ donc}$$

$$\Leftrightarrow (\Pi + I_3)(\Pi + 2I_3) = O_3 \quad \Pi \text{ est inversible}$$

Ainsi, on a bien $(\varphi + Id) \circ (\varphi + 2Id) = 0$

b) On sait que $-1 \in \text{sp}(\Pi)$ ^{donc à $\text{sp}(\varphi)$} , donc $\Pi + I_3$ n'est pas inversible. Ainsi, $0 \in \ker(\varphi + Id)$.

Donc, $\dim(\ker(\varphi + Id)) \geq 1$

De même, on sait que $-2 \in \text{sp}(\Pi)$, donc à $\text{sp}(\varphi)$.

Ainsi, $(\varphi + 2Id)$ n'est pas inversible. Donc $0 \in \ker(\varphi + 2Id)$

Donc, $\dim(\ker(\varphi + 2Id)) \geq 1$

c) Π n'est pas diagonalisable, et est d'ordre 3

Donc $\dim E_{-1}(\Pi) + \dim E_{-2}(\Pi) < 3 \Leftrightarrow \dim E_{-1}(\varphi) + \dim E_{-2}(\varphi) < 3$

Or, on sait que $\ker(\varphi + Id) = E_{-1}(\varphi)$ et

que $\ker(\varphi + 2\text{Id}) = E_{-2}(\varphi)$

On a donc $\dim(\ker(\varphi + \text{Id}) + \ker(\varphi + 2\text{Id})) < 3$

De plus on a montré que :

$$- \dim(\ker(\varphi + \text{Id})) \geq 1$$

$$- \dim(\ker(\varphi + 2\text{Id})) \geq 1$$

On peut donc en déduire que :

$$\underline{\dim(\ker(\varphi + \text{Id})) = 1} \quad \text{et} \quad \underline{\dim(\ker(\varphi + 2\text{Id})) = 1}$$

d) i) On sait : $\varphi(u) = -u \Leftrightarrow -\varphi(u) = u$

$$\varphi(v) = -2v \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\varphi(v) = v$$

De plus $u \neq 0$ et $v \neq 0$ car ce sont des vecteurs propres.

On sait aussi que $\varphi \neq 0$

~~libre linéaire~~

$$\text{Ainsi } (u, v) = (-\varphi(u), -\frac{1}{2}\varphi(v))$$

Les vecteurs u et v ne sont donc pas colinéaires, donc la famille (u, v) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

ii) Cherchons les réels a, b, c tels que :

$$au + bv + cw = 0$$

$$\text{iii) } \begin{cases} ((\varphi + \text{Id}) \circ (\varphi + 2\text{Id}))(w) = 0 \\ ((\varphi + 2\text{Id}) \circ (\varphi + \text{Id}))(w) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi + \mathcal{I}d)(\omega) \circ (\varphi + 2\mathcal{I}d)(\omega) = 0 \\ (\varphi + 2\mathcal{I}d)(\omega) \circ (\varphi + \mathcal{I}d)(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi(\omega) + \omega) \circ (\varphi(\omega) + 2\omega) = 0 \\ (\varphi(\omega) + 2\omega) \circ (\varphi(\omega) + \omega) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\omega) + 2\omega = \alpha u \\ \varphi(\omega) + \omega = \beta v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\omega) = \alpha u - 2\omega \\ \varphi(\omega) = \beta v - \omega \end{cases} \quad \omega_2 \leftarrow \omega_1 - 2\omega_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\omega) = \alpha u - 2\omega \\ -\varphi(\omega) = \alpha u - 2\beta v \end{cases}$$

Ainsi, $\varphi(\omega) = 2\beta v - \alpha u$

10) $\forall T \in \mathcal{A}$, on a montré à la question 5 que $\text{sp}(T) \subset \{0; -1; -2\}$

Numéro d'inscription

5 0 1 3 8 1

Né(e) le

14 / 12 / 2001

Signature



Nom

B E N M A H M O U D

Prénom(s)

J E H D I

19.3 / 20

Ecritome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

 4 /

Numéro de table

 15

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 2 :

Partie A :

$$1) a) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_n(t)}{1+t^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_n(t)}{(1+t^n)f_n(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(1+t^n)} = 1$$

Ainsi, $\frac{f_n(t)}{1+t^n} \sim \frac{f_n(t)}{0}$

$$b) \forall y \in]0, 1[, \int_y^1 f_n(t) dt \sim \int_y^1 \frac{1}{t} dt$$

Soient : $u(t) = f_n(t)$ $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $v(t) = t$

$u \mapsto f_n(t)$ est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , donc elle est sur $]y, 1[$

$t \mapsto t$ est une fonction polynomiale donc elle est de classe C^1 sur $]y, 1[$

D'après l'intégration par partie :

$$\int_y^1 f_n(t) dt = [t f_n(t)]_y^1 - \int_y^1 \frac{t}{t} dt$$

$$= -y f_n(y) - \int_y^1 1 dt$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

$$\begin{aligned} &= -y \ln y - [t]_y^1 \\ &= -y \ln y - (1 - y) \\ &= \underline{\underline{-1 + y - y \ln y}} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \ln(t) dt = \lim_{y \rightarrow 0} (-1 + y - y \ln(y))$$

$\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(y) = 0$, d'après les croissances comparées
de $y \mapsto y$ et $y \mapsto \ln(y)$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow 0} (-1 + y - y \ln(y)) = -1$

Donc, $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge, et $\underline{\underline{\int_0^1 \ln(t) dt = -1}}$

$$c) \mathcal{I}_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$$

On a montré à la question 1) a) que :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

Or, on vient de montrer que $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge
Ainsi, d'après les critères de convergence
d'intégrales équivalentes à termes positifs :

$\lim \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ converge. Donc \mathcal{I}_n converge

$$\begin{aligned}
2) a) \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{O_n(t)}{1+t^n} \right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{3/2}(1+t^n) + O_n(t)}{1+t^n} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{3/2}(1+t^n) + O_n(t)}{t^n \left(\frac{1}{t^n} + 1 \right)} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{3/2}(1+t^n) + O_n(t)}{t^n} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{t^n} + 1 \right)} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{t^{3/2}(1+t^n)}{t^n} + \frac{O_n(t)}{t^n} \right) \frac{1}{\frac{1}{t^n} + 1} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{(1+t^n)}{t^{n-3/2}} + \frac{O_n(t)}{t^n} \right) \frac{1}{\frac{1}{t^n} + 1} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{t^n \left(\frac{1}{t^n} + 1 \right)}{t^{n-3/2}} + \frac{O_n(t)}{t^n} \right) \frac{1}{\frac{1}{t^n} + 1} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{t^{3/2}} + \frac{O_n(t)}{t^n} \right) \frac{1}{\frac{1}{t^n} + 1} \right) \\
&= 0, \text{ d'après les croissances comparées de } t \mapsto O_n(t) \text{ et de } t \mapsto t^n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{O_n(t)}{1+t^n} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$

b) $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{O_n(t)}{1+t^n} dt$, or on a montré que :

$$\frac{O_n(t)}{1+t^n} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$.

Donc, d'après les critères de convergence d'intégrale négligeables à termes positifs :

$\int_1^{+\infty} \frac{O_n(t)}{1+t^n} dt$ converge. Ainsi, K_n converge

$$3) I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_n(t)}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{\varphi_n(t)}{1+t^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi_n(t)}{1+t^n} dt, \text{ avec } \varphi_n \text{ } \cancel{\text{sur } \mathbb{R}^+}$$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi_n(t)}{1+t^n} dt + K_n$$

Or on a montré que J_n et K_n sont convergentes.
Donc I_n converge.

Partie B:

a) a) soit $h(t) = \frac{\varphi_n(t)}{1+t^n} - \varphi_n(t) \quad \forall t \in]0; 1[$
 $t \mapsto \varphi_n(t)$ est une fonction dérivable sur $]0; 1[$.
 $t \mapsto 1+t^n$ est une fonction polynomiale, avec $1+t^n \neq 0$
 sur $]0; 1[$, donc elle est dérivable sur $]0; 1[$.
 Ainsi, par somme et quotient, $t \mapsto \frac{\varphi_n(t)}{1+t^n} - \varphi_n(t)$ est
 dérivable sur $]0; 1[$.

$$\forall t \in]0; 1[, h'(t) = \frac{\frac{1}{t}(1+t^n) - \varphi_n(t)nt^{n-1}}{(1+t^n)^2} - \frac{-1}{t}$$

$$= \frac{t(\frac{1}{t}(1+t^n) - \varphi_n(t)nt^{n-1}) - (1+t^n)^2}{t(1+t^n)^2}$$

$$= \frac{(1+t^n) - \varphi_n(t)nt^n - (1+t^n)^2}{t(1+t^n)^2}$$

$$t \in]0; 1[, \text{ donc } t(1+t^n)^2 > 0$$

Ainsi, le signe de $h'(t)$ est le signe de :

$$(1+t^n) - nt^n \varphi_n(t) - (1+t^n)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1+t^n - nt^n \varphi_n(t) - 1 - 2t^n - t^{2n} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^n (-1 - n\varphi_n(t) - 2 - t^{2n}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^n (-1 - n\varphi_n(t) - t^{2n}) > 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - n\varphi_n(t) - t^{2n} > 0$$

$$\Leftrightarrow -n\varphi_n(t) - t^{2n} > 1$$

Numéro d'inscription

5 0 1 3 8 1

Né(e) le

1 6 / 1 2 / 2 0 0 1

Signature

[Signature]

Nom

B E N T A H R O O D

Prénom(s)

M E H O I

19.3 / 20



Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

 /

Numéro de table

Commencez à composer dès la première page...

$$0 < t \leq 1$$

$\Leftrightarrow 0 < t^n \leq 1$ car la fonction puissance est

$\Leftrightarrow 1 \leq t^{-n} \leq 2$ croissante

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t^{-n}} < 1$ car la fonction inverse est

~~$\Leftrightarrow t^{-n} \leq 2$~~ décroissance

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t^{-n}} < 1$ car $\forall t \in]0; 1[$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{t^{-n}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$$b) \int_0^1 -t^n \ln(t) dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 -t^n \ln(t) dt$$

On pose : $u(t) = -\ln(t)$

$$v'(t) = -\frac{1}{t}$$

$$v(t) = t^{-n}$$

$$v(t) = \frac{t^{-n+1}}{-n+1}$$

$t \mapsto -\ln(t)$ est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , donc elle est C^1 sur $]A; 1[$

$t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ est une fonction polynomiale donc elle est de classe C^1 sur $[A, 1]$

0 - après l'intégration par partie :

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 t^n \varphi_n(t) dt = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\left[-\varphi_n(t) \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} dt \right)$$

$$= \lim_{A \rightarrow 0} \left(\varphi_n(A) \frac{A^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_A^1 t^n dt \right)$$

$$= \lim_{A \rightarrow 0} \left(\varphi_n(A) \frac{A^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_A^1 \right)$$

$$= \lim_{A \rightarrow 0} \left(\varphi_n(A) \frac{A^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} (-1 - A^{n+1}) \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}$$

d'après les croissances comparées de $A \mapsto \varphi_n(A)$ et de $A \mapsto \frac{A^{n+1}}{n+1}$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\varphi_n(t)}{n+1} dt$$

On a montré : $\forall n \geq 2$ et $\forall t \in]0, 1[$:

$$0 \leq \frac{\varphi_n(t)}{n+1} - \varphi_n(t) \leq -t^n \varphi_n(t)$$

On intègre les membres de l'inégalité de 0 à 1 avec $0 < \varepsilon < 1$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\varphi_n(t)}{n+1} - \varphi_n(t) dt \leq \int_0^1 -t^n \varphi_n(t) dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{\varphi_n(t)}{n+1} - \varphi_n(t) dt \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n!)^2} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e_n(t)}{1+t^n} \cdot e_n(t) dt = 0$$

Ainsi :

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{e_n(t)}{1+t^n} dt - \int_0^1 e_n(t) dt \right) = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e_n(t)}{1+t^n} dt = \int_0^1 e_n(t) dt = -1$, d'après la question (b)

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$$

B) Soit $\forall x \in [1; +\infty[$, $g(x) = e^x x - x$

$x \mapsto e^x x$ est une fonction dérivable sur $[1; +\infty[$

$x \mapsto x$ est une fonction polynomiale donc elle est dérivable sur $[1; +\infty[$

Ainsi, par somme, $x \mapsto e^x x - x$ est dérivable sur $[1; +\infty[$

$$\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$= \frac{1-x}{x}$$

$x \geq 1$, donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $1-x$:

$$1-x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

Ainsi, sur $[1; +\infty[$, $g'(x)$ est négative, donc

g est décroissante sur $[-1; +\infty[$.

g admet un ~~minimum~~ en -1 maximum en -1 qui vaut:

$$g(-1) = \ln(-1) - 1 = -1$$

Ainsi, $\forall x \in [-1; +\infty[$, $g(x) \leq -1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \ln x - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq x$$

De plus $x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln(1)$ car la fonction

\ln est croissante sur \mathbb{R}_+^*

Ainsi, $\forall x \geq 1$, $0 \leq \ln(x) \leq x$

$\forall x \geq 1$, $0 \leq \ln(x) \leq x$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{1+x^n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{x(\frac{1}{2} + x^{n-1})}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} + x^{n-1}} \leq \frac{1}{x^{n-1}}, \text{ car } \frac{1}{2} + x^{n-1} \geq x^{n-1} \forall x \geq 1, \text{ donc } \frac{1}{\frac{1}{2} + x^{n-1}} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

b) On a montré $\forall n \geq 3$ et $\forall x \geq 1$:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

On intègre les membres de l'inégalité de -1 à $+\infty$ avec $-1 \leq +\infty$:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+\infty} 0 dx \leq \int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^n} dx \leq \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx$$

Numéro d'inscription

5001381

Signature 

Né(e) le

14 / 12 / 2001

Nom

BEN TAHMOU S

Prénom(s)

REHDI

19.3 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 /

Numéro de table 15

Commencez à composer dès la première page

$$\Leftrightarrow 0 \leq k_n \leq \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_B \frac{1}{2^{2n}} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k_n \leq \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(n-2)2^{n-2}} \right]_B$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k_n \leq \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(n-2)2^{n-2}} + \frac{1}{n-2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k_n \leq \frac{1}{n-2}$$

c) $\forall n \geq 3$ et $\forall x \geq 1$:

$$0 \leq k_n \leq \frac{1}{n-2}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-2} = 0$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement des

limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$

Or $J_n = J_n + k_n$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n + k_n$
 $= -1$

Partie C

$$b) \int_y^1 \frac{\ln(t)}{-t^n} dt.$$

$$\text{Soit } u = -\ln(t)$$

$$\Leftrightarrow -u = \ln(t)$$

$$\Leftrightarrow e^{-u} = t$$

$$\Leftrightarrow e^{-un} = t^n$$

$$\text{On a } e^{-u} = t$$

$$\Leftrightarrow -e^{-u} du = dt$$

Enfin, si $t=y$ alors $u = -\ln(y)$

si $t=1$ alors $u=0$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \int_y^1 \frac{\ln(t)}{-t^n} dt &= \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{-(-\ln(y))^{-1} e^{-nu}} e^{-u} du \\ &= - \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{(-\ln(y))^{-1} e^{-nu}} e^{-u} du \\ &= \int_0^{\ln(y)} \frac{-u}{-e^{-nu}} e^{-u} du \end{aligned}$$

7) a) $X \subset \mathbb{R} \rightarrow E(\cdot)$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) $\forall n \geq 2, Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$

D'après le théorème de transfert

$\forall Y_n$ admet une espérance si et seulement si

$$\int_0^{+\infty} \frac{-x}{1+e^{-nx}} e^{-x} dx \text{ converge}$$

Soit $x = -\ln(t)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{-x}{1+e^{-nx}} e^{-x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n$$

En effet, si $y \rightarrow 0$ alors $\ln(y) \xrightarrow{0} -\infty$

donc $-\ln(y) \xrightarrow{0} +\infty$

De plus on a montré que J_n converge

Donc Y_n admet bien une espérance et

$$E(Y_n) = J_n$$

8) fonction $Y = \text{simul}(Y(n, m))$

$Y = \text{zeros}(-1, m)$

for $i = 2 : n$

$x = \text{rand}(1, 1, 'exp', 1)$

$Y(i) = (-1 * x) / (1 + \exp(-1 * ~~i~~ * x))$

end

endfunction

Exercice 3:

Partie A:

$$1) (X=2) = (P_1 \cap P_2)$$

$$(X=3) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

$$(X=4) = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$$

$$\begin{aligned} a_2 = p(X=2) &= p(P_1)p(P_2) && \text{car les événements sont} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{indépendants} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = p(X=3) &= p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= p(F_1)p(P_2)p(P_3) && \text{car les événements sont} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{indépendants} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 = p(X=4) &= p(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + p(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= p(F_1)p(F_2)p(P_3)p(P_4) + p(P_1)p(F_2)p(P_3)p(P_4) && \text{car} \\ &&& \text{les événements sont indépendants} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$2) \forall n \geq 2, u_n = p(U_n)$$

U_n signifie qu'au cours des n lancers, ~~l'événement~~ on a obtenu au moins une fois ~~un~~ une succession de pile. Donc U_n compte le nombre de succession de deux piles consécutifs.

Numéro d'inscription

5 0 1 3 8 1



Né(e) le

1 4 / 1 2 / 2 0 0 1

Signature

[Signature]

Nom

B E N M A H M O U D

Prénom (s)

M E H O U

19.3 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

 7 /

Numéro de table

 15

Commencez à composer dès la première page.

Ainsi, $u_n = p(U_n)$
 $= \sum_{k=2}^n a_k$

3) a) fonction $y = \text{simuE}(n)$

tirs = 0

pile = 0

while pile < 2

if rand() < 1/2 then pile = pile + 1
 else

pile = pile

end

tirs = rand()

end

y = tirs

end fonction

b) fonction $s = \text{moyenne}(n)$

$s = \text{grand}(1, 1, 'bin', n, 1/2) / n$

end fonction

c) Au vu du graphe, on peut penser qu'après un grand nombre de tirage, la variable x semble

tendre vers 6.

Partie B:

$$\begin{aligned} \text{a) a) } \forall n \geq 2, \quad p(U_{n+1}) &= p(U_n \cup B_{n+1}) \\ &= p(U_n) + p(B_{n+1}) - p(U_n \cap B_{n+1}) \end{aligned}$$

En effet, $(U_{n+1}) = (U_n \cup B_{n+1})$ car l'évènement B_{n+1} signifie qu'au n -ième et $(n$ -ième $+1)$ ancers a été obtenu pile.

$$\text{b) } \forall n \geq k, (U_n \cap B_{n+1})$$

c) Ainsi, $\forall n \geq k$:

$$p(U_{n+1}) = p(U_n) + p(B_{n+1}) - p(U_n \cap B_{n+1})$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + p(B_{n+1}) - p((U_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})) \\ &= U_n + p(P_n \cap P_{n+1}) - p(U_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + p(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \end{aligned}$$

car les évènements ne sont pas compatibles

$$= U_n + p(P_n) p(P_{n+1}) - p(U_{n-2}) p(P_{n-1}) p(P_n) p(P_{n+1}) + p(P_{n-1}) p(P_n) p(P_{n+1})$$

car les évènements sont indépendants d'après la lemme

des coalitions

$$= u_n + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} u_{n-2}$$
$$= \underline{\underline{u_n + \frac{1}{8} (1 + u_{n-2})}}$$

$$5) \quad u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{1}{8} (1 + u_{n-2}) - u_n$$
$$= \frac{1}{8} (1 + u_{n-2})$$

Or, la suite u_n est une somme de probabilités donc $u_n \leq 1$. Ainsi $1 + u_{n-2} < 0$

~~Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8} (1 + u_{n-2}) > 0$~~

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8} (1 + u_{n-2}) > 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{u_{n+1} > u_n}}$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers 1

6) L'évènement $(X = -1)$ signifie que jamais deux piles n'ont été tirées consécutivement.

Ainsi, $(X = -1) = \overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n}$

Donc $p(X = -1) = 1 - p\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1 - p\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right)$

Or $p\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1$ car c'est la somme des probabilités qui vaut donc toujours 1

Ainsi $p(X = -1) = 1 - p\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right)$
 $= 1 - 1 = 0$

Partie C:

$$\forall n \geq 4$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \forall n \geq 4 \\ V_n - V_{n+1} &= 1 - U_n - 1 + U_{n+1} \\ &= U_{n+1} - U_n \\ &= \frac{-1}{8} (1 - U_{n-2}) \\ &= \frac{-1}{8} V_{n-2} \end{aligned}$$

$$8) \quad p(x=n+1) = p(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n+1})$$

($x=n+1$) signifie qu'on obtient de piles consécutifs au ($n+1$)ancers

$$\begin{aligned} V_n - V_{n+1} &= 1 - U_n - 1 + U_{n+1} \\ &= U_{n+1} - U_n \\ &= q_{n+1} \\ &= p(x=n+1), \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

9) Initialisation: On pose $n=2$

$$\begin{aligned} 6 - 8V_n - 2V_2 &= 6 - 8(1 - U_n) - 2(1 - U_2) \\ &= 6 - 8\left(1 - \frac{1}{8}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 6 - 8 \times \frac{7}{8} - 2 \times \frac{3}{4} \\ &= 6 - 7 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{12 - 14 - 3}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=2}^2 k p(x=k) = 2p(x=2) \\ &= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 - 8V_n - 2V_2 &= 6 - 8(1 - U_n) - 2(1 - U_2) \\ &= 6 - 8\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 6 - 8\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{12 - 8 - 3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Numéro d'inscription

501381



Né(e) le

14/12/2001

Signature

Nom

BEN TRAN MOU D

Prénom(s)

PEN DI

19.3 / 20

Ecritome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

 4 /

Numéro de table

 15

Commencez à composer dès la première page

La proposition est vérifiée pour $n=2$

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 tel que $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$ est vraie : c'est l'hypothèse de récurrence. Montrons que $S_{n+1} = 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}$ est vraie.

$$S_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} k p(x=k)$$

$$= \sum_{k=2}^n k p(x=k) + (n+1)p(x=n+1)$$

$$= S_n + (n+1)(v_n - v_{n+1})$$

$$= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + nv_n - nv_{n+1} + v_n - v_{n+1}$$

$$= 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}$$

La proposition est vérifiée pour $(n+1)$

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \geq 2$

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$