E9-00059
304801
Maths E

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2021

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Partie 1

1) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale.

2) a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(x,y) = 3x^2 - 3y$

$\partial_2(x,y) = 3y^2 - 3x$

b) Soit $A \in \mathbb{R}^2$. A est un point critique de f si et seulement si $\partial_1(A) = 0$ et $\partial_2(A) = 0$

D'où, on a :
$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 = 3y \\ 3y^2 = 3x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 = y \\ x^4 = x \\ x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y(y^3 - 1) = 0 \\ x(x^3 - 1) = 0 \\ x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc $A(0,0)$ et $B(1,1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{1,1}(x,y) = 6x$ $\quad \partial_{2,1}(x,y) = -3$

$\partial_{2,2}(x,y) = -3$ $\quad \partial_{2,2}(x,y) = 6y$

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\nabla^2(f)(x,y)$ la matrice hessienne et on a :

$$M = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \in sp(M) \iff (M - \lambda I_2) \notin GL_2(\mathbb{R})$

$\iff \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$

$\iff \det(M - \lambda I_2) = 0$

$\iff \lambda^2 - 9 = 0$

$\iff \lambda = 3$ ou $\lambda = -3$ $\qquad$ soit $sp(M) = \{-3, 3\}$

Comme les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ ne sont pas de même signe, f ne présente pas d'extremum local en A.

• $N = \nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in sp(N) \iff \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R}) \iff \det(N - \lambda I_2) = 0$

$\iff (6-\lambda)^2 - 9 = 0 \iff (6-\lambda-3)(6-\lambda+3) = 0 \iff (3-\lambda)(9-\lambda) = 0$

d'où $sp(N) = \{3, 9\}$

Comme les valeurs propres de $D^2(f)(1,1)$ sont de même signe strictement par h,

f admet un minimum local en $(1,1)$, et

$f(1,1) = -1$; de plus, il s'agit bien de l'unique extremum local de f.

4) $f(-1,-1) = -1 - 1 - 3 = -5$. Comme $-5 < -1$,

alors, $f(-1,-1) < f(1,1)$ donc cet extremum n'est pas global.

Partie 2

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $n \geq 4$.

g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3$

$$g'(x) > 0 \iff 3x^2 - 3 > 0 \iff x^2 > 1 \iff x > 1 \text{ ou } x < -1$$

D'où, g est strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

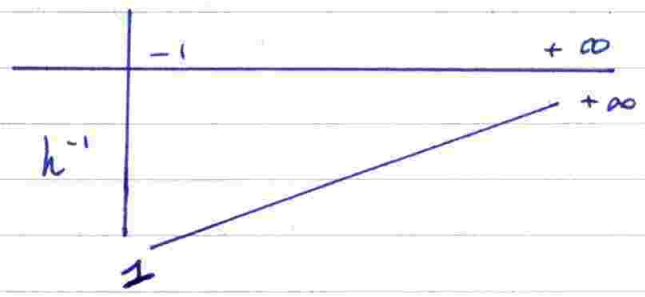
$\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-\infty} x^3 = -\infty$, $g(-1) = 3$, $g(1) = -1$, et $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{+\infty} x^3 = +\infty$

g effectue donc une bijection croissante de $]-\infty ; -1]$ vers $]-\infty ; 3]$, une bijection décroissante de $[-1, 1]$ vers $[-1, 3]$ et une bijection croissante de $[1 ; +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$.

Or, comme $n \geq 4$, $n \notin]-\infty ; 3]$, $n \notin [-1, 3]$ mais $n \in [-1 ; +\infty[$ d'où,
D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel u_n appartenant à $[1 ; +\infty[$ tel que $g(u_n) = n$.

Conclusion : $\forall n \geq 4$, il existe un unique réel u_n tel que $g(u_n) = n$

6) a) h effectue une bijection croissante de $[1, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$, donc h^{-1} effectue une bijection croissante $[-1, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$



b) $\forall n \geq 1$, $h^{-1}(n) = u_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} h^{-1}(n) = +\infty$ d'après ce qui précède donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c)

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1) a) . $\forall x \leq 0$, $f(x) = 0$

$\forall x > 0$, $\frac{2}{x^3} > 0$, et $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0$ comme $\forall y \in \mathbb{R}$, $e^y > 0$.

D'où, $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ sur, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

. De plus, $x \to \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où $x \to f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 comme , $\forall x \leq 0$, $f(x) = 0$

. Soit $A > 0$, et $B > A$.

Comme $x \to \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, on a :

$$\int_A^B \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} dx = \left[e^{-1/x^2}\right]_A^B = e^{-1/B^2} - e^{-1/A^2}$$

d'où

$$\lim_{B \to +\infty} \int_A^B \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} dx = 1 - e^{-1/A^2}$$ comme $\lim_{y \to 0} e^{-y} = 1$ et $\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^2} = 0$

d'où $\int_A^{+\infty} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} dx = 1 - e^{-1/A^2}$, et comme $\lim_{A \to 0^+} -\frac{1}{A^2} = -\infty$ et $\lim_{y \to -\infty} e^y = 0$,

alors $\lim_{A \to 0} -e^{-1/A^2} = 0$ d'où $\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} dx$ existe et vaut 1

Comme, $\forall x \leq 0$, $f(x)=0$, alors $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$ d'où ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Conclusion : f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y

b)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2) a) • $\forall x < 1$, $g(x) = 0$

$\forall x \geq 1$, $g(x) = \frac{2}{x^3} > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

• $x \to \frac{2}{x^3}$ continue sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $[1, +\infty[$

Comme, $\forall x < 1$, $g(x) = 0$, alors g continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1

• Soit $A \geq 1$, $\int_1^A g(x)\,dx = \int_1^A \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A = -\frac{1}{A^2} + 1$

Comme $\lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{A^2} = 0$, $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ existe et $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = 1$.

Comme, $\forall x < 1$, $g(x) = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$.

Conclusion : g peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X

b) $$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \dots X_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots X_n) \leq x)$

$= P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \dots \cap [X_n \leq x])$

$= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$ come $(X_1, X_2, \dots X_n)$ sont mutuellement indépendantes

$= \prod_{k=1}^{n} P(X_1 \leq x)$ come toutes les variables suivent la même loi que X

$= \prod_{k=1}^{n} G(x) = (G(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(-\frac{1}{x^2}+1\right)^n & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right)$

$= P(M_n \leq x\sqrt{n})$. Or,

$x\sqrt{n} \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où, d'après la question précédente,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(-\frac{1}{x^2 n}+1\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$

4) $\forall x \leq 0$, $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ d'où, $\forall x < 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$F_n(x) = 0$ soit $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$ si $x \leq 0$.

5) a). Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $n > \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor \Rightarrow$

$\frac{1}{x^2} < n$ car si $\frac{1}{x^2} \geq n$ alors

$\left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor \geq n$ puisque n est un entier, soit $x^2 n > 1$ come $x > 0$

d'où $\sqrt{n}\, x > 1$ come $x \to \sqrt{x}$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$ soit $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2 n}\right)^n$

b) $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / n_0 > \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$

. Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$

Ainsi, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{nx^2} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}$ soit

$n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$ d'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) = -\frac{1}{x^2}$ et, comme exp continue sur $\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ soit, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

6) on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = F(x)$

$\forall x \leq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0 = F(x)$.

Conclusion : en tout point où F est continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$, donc

Y_n converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle

de Y

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2021

Épreuve de : mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

$a \in]0,1[$,

1) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \in Sp(M_a) \iff \exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \,/\, M_a X = \lambda X$

$\iff (M_a - \lambda I_3) \notin GL_3(\mathbb{R})$

$\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1-a & a-\lambda & 0 \\ 0 & 1-a & a-\lambda \end{pmatrix} \notin GL_3(\mathbb{R})$

$\iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou } \lambda = a \end{cases}$ comme une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul.

D'où, les valeurs propres de M_a sont 1 et a.

b) Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

. $X \in E_1(M_a) \iff M_a X = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff$

$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ (1-a)x_1 + a x_2 = x_2 \\ (1-a)x_2 + a x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ (1-a)x_1 = (1-a)x_2 \\ (1-a)x_2 = (1-a)x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \iff$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $E_1(M_a) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une base de $E_1(M_a)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$X \in E_a(M_a) \Leftrightarrow M_a X = aX$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = ax_1 \\ (1-a)x_1 + ax_2 = ax_2 \\ (1-a)x_2 + ax_3 = ax_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ comme } a \in]0,1[\\ (1-a)x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ comme } a \in]0,1[\\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

soit $X \in E_a(M_a) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où $E_a(M_a) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ soit $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_a(M_a)$

c) a et 1 sont les uniques valeurs propres de M_a, or,

$\dim E_a(M_a) = 1$ et $\dim E_1(M_a) = 1$ donc, comme $M_a \in M_3(\mathbb{R})$,

et $\dim E_a(M)_a + \dim E_1(M_a) = 2$, alors M_a n'est pas diagonalisable

2) $E = \mathrm{Vect}((I, M_a, M_a^2))$

$$\cdot\ M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$$

Soit $(a_1, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$a_1 I + bM_a + cM_a^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ b(1-a) & ab & 0 \\ 0 & b(1-a) & ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ c(1-a)^2 & ca^2 & 0 \\ c(1-a)^2 & 2ac(1-a) & ca^2 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} c(1-a)^2 = 0 \text{ d'où } c = 0 \text{ comme } a \in]0,1[\text{ et comme } c = 0, \\ b(1-a) = 0 \text{ d'où } b = 0 \text{ comme } a \in]0,1[\text{ soit, comme } c = 0 \text{ et } b = 0 \\ a_1 I = 0 \text{ d'où } a_1 = 0 \text{ soit } a_1 = 0,\ b = 0,\ c = 0 \end{cases}$$

Conclusion : (I, M_a, M_a^2) est une famille libre de 3 vecteurs, donc une base de E comme $E = \mathrm{Vect}((I, M_a, M_a^2))$, donc $\dim E = 3$.

b) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(M_a - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} = (1-a)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1-a)J$$

$$(M_a - aI) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} = (1-a)K$$

d'où $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (1-a)J\left((1-a)K\right)^2$

$$= (1-a)J\left((1-a)^2K^2\right) = (1-a)^3 JK^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

c) $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = 0$ d'où

$(M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I) = 0$ car

$M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2I = 0$ d'où

$M_a^3 = (2a+1)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2 I$ d'où

$M_a^3 \in E$ puisque $M_a^3 \in \mathrm{Vect}((M_a^2, M_a, I))$

3)a)

3)a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " Il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I \text{ "}$$

- Si $n = 0$, $M_a^n = I$ d'où, il y a bien un unique triplet de réels

avec $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vérifié.

On a alors : $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$ soit

$$M_a^{n+1} = u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \text{ d'où}$$

$$M_a^{n+1} = u_n \left[(2a+1)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2 I\right] + v_n M_a^2 + w_n M_a$$

$$= u_n(2a+1)M_a^2 - u_n(a^2+2a)M_a + a^2 u_n I + v_n M_a^2 + w_n M_a$$

$$= M_a^2\left(u_n(2a+1) + v_n\right) + M_a\left(-u_n(a^2+2a) + w_n\right) + I\left(a^2 u_n\right)$$

$$M_a^{n+1} = u_{n+1} M_a^2 + v_{n+1} M_a + w_{n+1} I \text{ en}$$

posant $\begin{cases} u_{n+1} = u_n(2a+1) + v_n \\ v_{n+1} = w_n - u_n(a^2+2a) \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tels que

$$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ v_0 = 0, \ w_0 = 1 \text{ et} \\ u_{n+1} = u_n(2a+1) + v_n \\ v_{n+1} = w_n - u_n(a^2+2a) \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2021

Épreuve de : mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) En réalité, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_n(a^2+2a) + w_n$

or, lors de l'instruction $v = -a*(a+2)*u + w$, on a déjà en auparavant $u = u*(2*a+1) + v$, donc on est déjà passé à u_{n+1} ; en d'autres termes, l'instruction $v = -a*(a+2)*u + w$ calcule $v_{n+1} = -u_{n+1}(a^2+2a) + w_n$, ce qui n'est pas le bon calcul, et on pouvait faire la même remarque pour $w = a*a*u$ qui calcule en fait $w_{n+1} = a^2 u_{n+1}$ ce qui n'est pas le bon calcul.

La boucle for n'est donc pas bien initialisée.

c)
```
x = 0;
for k = 1 : n
x = u
u = (2*a+1)*u + v
v = -a*(a+2)*x + w
w = a*a*x
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2}(2a+1) + v_{n+2}$

$= u_{n+2}(2a+1) + w_{n+1} - u_{n+1}(a^2+2a)$

$= u_{n+2}(2a+1) + a^2 u_n - (a^2+2a)u_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

5) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)a^n = 0$ comme $a \in]0,1[$

$\lim\limits_{n\to+\infty} na^{n-1} = 0$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{(a-1)^2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = a^2 u_n$ - comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{(a-1)^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \left(\dfrac{a}{a-1}\right)^2$

On a alors, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = w_n - u_n(a^2+2a)$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \left(\dfrac{a}{a-1}\right)^2 - \dfrac{a^2+2a}{(a-1)^2} = \dfrac{a^2-a^2-2a}{(a-1)^2} = -\dfrac{2a}{(a-1)^2}$ soit

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\dfrac{2a}{(a-1)^2}$

b) on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 - \frac{2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I \text{ d'où}$$

$$L_a = \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 - \frac{2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I$$

c) $$L_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1-a^2}{(a-1)^2} & \frac{a^2}{(a-1)^2} & 0 \\ 1 & \frac{2a(1-a)}{(1-a)^2} & \frac{a^2}{(1-a)^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2a}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{2a(1-a)}{(a-1)^2} & \frac{2a^2}{(a-1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2a(1-a)}{(1-a)^2} & \frac{2a^2}{(a-1)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^2}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(a-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{(a-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1-2a+a^2}{(a-1)^2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) a)

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f_a - Id)$, X matrice de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ représentant les coordonnées (x_1, x_2, x_3) de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a alors $(M_a - Id)X = 0$ d'où $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ soit

$(a-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ soit $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$ soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ soit $x = (x_1, x_1, x_1)$

d'où, comme

$$L_a = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \quad \text{avec } e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$$

$$\varphi_a(x) = \varphi_a((x_1, x_1, x_1)) = x_1 \varphi_a(e_1) + x_1 \varphi_a(e_2) + x_1 \varphi_a(e_3) \text{ par linéarité de } \varphi_a, \text{ étant un endomorphisme}$$

$$= (x_1, x_1, x_1) = x.$$

d'où, $\forall x \in \ker(\varphi_a - Id)$, $\varphi_a(x) = x$.

b)

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Problème

1) a) $X_1(\Omega) = [\![1;+\infty[\![$, $Y_1(\Omega) = [\![1;+\infty[\![$.

$\forall i \in [\![1;+\infty[\![$

Soit $A_{i,k}$ l'événement " A obtient un pile au i^e lancer de la k^e manche, s'il a lieu" $\forall (i,k) \in [\![1;+\infty[\![^2$, $P(A_{i,k}) = p$

$$\forall j \in [\![1;+\infty[\![,\ P(X_1 = j) = P(\overline{A_{1,1}} \cap \overline{A_{2,1}} \cap \dots A_{j,1})$$

$$= P(\overline{A_{1,1}})\, P_{\overline{A_{1,1}}}(\overline{A_{2,1}}) \dots P_{\overline{A_{j-1,1}}}(A_{j,1})$$

d'après la formule des probabilités composées, d'où

$$\forall j \in [\![1;+\infty[\![,\ P(X_1 = j) = (1-p)^{j-1} p$$

Par un raisonnement analogue, avec $B_{i,k}$ l'événement identique à $A_{i,k}$ mais avec le jeu B, on a aussi :

$$\forall j \in [\![1;+\infty[\![,\ P(Y_1 = j) = (1-p)^{j-1} p.$$

$$\lim_{j \to +\infty} P(X_1 = j) = \lim_{j \to +\infty} P(Y_1 = j) = 0, \text{ comme } 1-p \in]0,1[.$$

Il est donc quasiment impossible que la première manche dure éternellement.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $E_1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X_1 = k] \cap [Y_1 = k])$

c) $P(E_1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X_1 = k] \cap [Y_1 = k]\right)$. Or, comme

$\forall (i,j) \in ([1;+\infty[)^2$, $([X_1 = i] \cap [Y_1 = i]) \cap ([X_1 = j] \cap [Y_1 = j]) = \emptyset$,

alors $P(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [Y_1 = k])$

Or, comme A et B lancent leurs pièces de façon indépendantes,

(X_1) et (Y_1) sont deux variables indépendantes d'où

$P(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k]) P(Y_1 = k)$ soit

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p \, (1-p)^{i-1} p$$

$$= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-2} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^i$$

$$= \left(\frac{p}{(1-p)}\right)^2 \left[\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right]$$

$$= \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right) = \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right)$$

d) Les conditions de départ de A et B sont complètement identiques; aucune raison pour que l'un soit plus avantagé pour gagner le jeu à la première manche.

$P(G_1) = P(X_1 < Y_1)$. Or, $\{[X_1 = k], k \in [1;+\infty[\}$ forme un système complet d'événement.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(G_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 < Y_1] \cap [X_1 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([Y_1 > k] \cap [X_1 = k])$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(Y_1 = i) \times P(X_1 = k)\right] \text{ par indépendance de } Y_1 \text{ et } X_1$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[P(X_1 = k)\left(\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i) - \sum_{i=1}^{k} P(Y_1 = i)\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)\left(1 - \sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1}p\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)\left(1 - p\sum_{i=0}^{k-1}(1-p)^{i}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)\left(1 - p \times \frac{1-(1-p)^k}{p}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)\left(1 - (1-(1-p)^k)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)(1-p)^k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p(1-p)^k$$

$$= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^2)^k$$

$$= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right)$$

donc $\underline{P(G_1) = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right)}$

2)a) $\forall n \geq 2$,

$$G_n = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap [X_n < Y_n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n < Y_n]$$

b) $\forall k \geq 2$, $P_{E_1 \cap E_2 \cap \dots E_{k-1}}(E_k) = P(E_1) = \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right)$

Comme le déroulement de la k^e partie est identique au déroulement de la 1e.

$\forall n \geq 2,\ P(G_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]\right)$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) P_{\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k}(X_n < Y_n)$$

$$= P(X_1 < Y_1) \times P(E_1 \cap E_2 \cap \dots E_{n-2}) P_{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1})$$

$$= P(X_1 < Y_1) P(E_1) P_{E_1}(E_2) P_{E_1 \cap E_2}(E_3) \dots P_{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1})$$

d'après la formule des probabilités composées

$$= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right) \times \left(\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right)\right)^{n-1}$$

$$= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{(1-q)(1+q)} - 1\right) \times \left(\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{(1-q)(1+q)} - 1\right)\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{(1+q)q} - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q^2(1+q)} - \frac{p^2}{q^2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1 - p(1+q)}{q(1+q)}\right)\left(\frac{p - p^2(1+q)}{q^2(1+q)}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1 - (1-q)(1+q)}{q(1+q)}\right)\left(\frac{1 - q + (1-q)^2(1+q)}{q^2(1+q)}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1 - (1-q^2)}{q(1+q)}\right)\left(\frac{1 - q + (1-q)(1-q^2)}{q^2(1+q)}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{q}{1+q}\left(\frac{(1-q)(1 + 1 - q^2)}{q^2(1+q)}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{q}{1+q}\left(\frac{2 - 2q - q^2 + q^3}{q^2(1+q)}\right)^{n-1}$$ Na chaudi

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 3

```
X = grand(1,1,'geom',p)
Y = grand(1,1,'geom',p)
c = c+1
end
if X < Y then disp('A')
         else disp('B')
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

24/