



E9-00059

304801

Maths E

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 21

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1Partie A

$$\forall n \in]-\infty; 1], \varphi(x) = \begin{cases} n + (1-n)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1) $x \rightarrow 1-x$ continue sur $]-\infty; 1[$ à valeur dans $]0; +\infty$
 $y \rightarrow \ln y$ continue sur R^* .

d'où $x \rightarrow \ln(1-x)$ continue sur $]-\infty; 1[$
 $n \rightarrow n$ continue sur $]-\infty; 1[$
et somme

Pas produit de fonctions continues sur $]-\infty; 1[$, $x \rightarrow \varphi(n)$
continue sur $]-\infty; 1[$

. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = 0^+$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
par composition.

d'où, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (n + (1-n)\ln(1-x)) = 1 = \varphi(1)$

D'où φ continue en 1.

Conclusion : φ continue sur $]-\infty; 1]$.

2) a) $x \rightarrow 1^-$ de classe C^1 de $]-\infty; 1[$ vers \mathbb{R}_+^α

• \ln de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^α d'où

$x \rightarrow \ln(1-x)$ de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$

comme $x \rightarrow x$ de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$, par somme et produit

de fonctions de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$,

$x \rightarrow \varphi(x)$ de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$.

$$\text{Une }]-\infty; 1[, \quad \varphi'(x) = 1 + \left(-\ln(1-x) + (1-x) \left(-\frac{1}{1-x} \right) \right)$$

$$\varphi'(x) = 1 + (-\ln(1-x) - 1)$$

$$\text{Une }]-\infty; 1[, \quad \varphi'(x) = -\ln(1-x)$$

Soit $x \in]-\infty; 1[$.

$$2) b) \quad \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(1-x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) < 0$$

$\Leftrightarrow 1-x < 1$ comme \exp strictement croissante sur \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow x > 0,$$

Conclusion: φ est strictement dérivable sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; 1]$, car φ continue en 1.

$$2) c) \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{x + (1-x)\ln(1-x) - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) + (1-x)\ln(1-x)}{x-1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} (1 - \ln(1-x)) = +\infty$$

Conclusion: φ n'est pas dérivable en 1

$$3) \quad \text{Un } x < 1, \quad \varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x) = x - 1 + (1-x)\ln(1-x) + 1$$

$$= [(1-x)\ln(1-x)] \left[-\frac{1}{\ln(1-x)} + 1 \right] + 1. \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)\ln(1-x) = +\infty$$

par produit, comme $\lim_{n \rightarrow -\infty} (1-n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} (-n) = +\infty$, et

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\ln(1-n)} \right) = 0 \text{ d'où par produit de limite,}$$

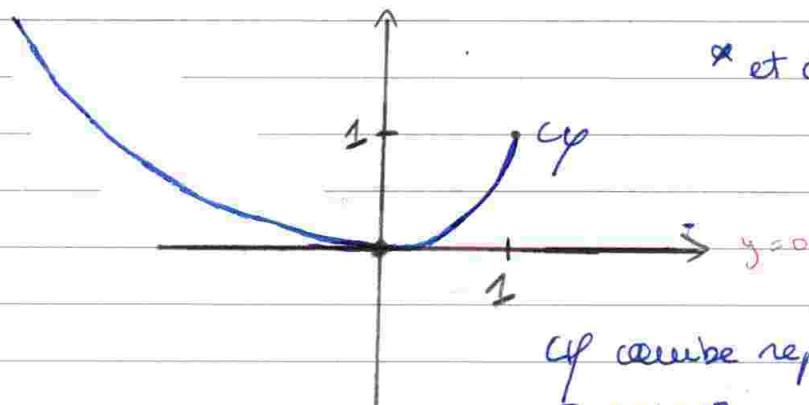
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(n) = +\infty$$

4) $\varphi(0) = 0$

$\varphi'(0) = 0$ d'où la tangente T_0 à φ en 0 est :

Uneq, $T_0: y = \varphi'(0)x + \varphi(0) = 0$

De plus, comme $x \rightarrow \varphi'(x)$ est dérivable sur $]-\infty; -1[$, on a, une $x \rightarrow -1[$, $\varphi''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, *
on obtient alors le graphique suivant :



* et comme, une $x \rightarrow -1[$,
 $\varphi''(x) > 0$, φ est concave
sur $]-\infty; -1[$.

Graphique représentatif de φ sur
 $]-\infty; -1[$.

5)a) Soit $a \in]0, 1[$.

$t \rightarrow$ est continue sur $[a, 1]$ en tant que produit de fonctions
continues sur $[a, 1]$

De plus, en posant, $\forall t \in [a, 1]: \begin{cases} u(t) = t & u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$,

comme u et v sont de classe C^1 sur $[a, 1]$, par intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_a^1 t \ln t dt &= \left[\frac{t^2 \ln t}{2} \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t}{2} dt \\ &= -\frac{a^2 \ln a}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^1 \end{aligned}$$

$$\int_a^1 t \ln t dt = -\frac{a^2 \ln a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \cdot \text{comme, par récurrence composée, } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 \ln a}{2} = 0, \text{ et } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}}{2} = 0$$

$\int_0^1 \ln x \, dx$ converge et

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -\frac{1}{2}$$

5)b) φ continue sur $[0;1]$ donc

$\int_0^1 \varphi(x) \, dx$ existe.

De plus, $\int_0^1 [\ln x + (1-x) \ln(1-x)] \, dx = \int_0^1 x \ln x \, dx + \int_0^1 (1-x) \ln(1-x) \, dx$ par linéarité de l'intégration

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 (1-x) \ln(1-x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 (1-x) \ln(1-x) \, dx. \text{ en posant } u = 1-x$$

$du = -dx,$
ces fonctions étant de classe C^1
sur $[0,1]$, on a, par changement
de variables,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) \, dx &= \frac{1}{2} + \int_0^1 u \ln u - du \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 u \ln u \, du \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

On a bien $\int_0^1 \varphi(x) \, dx = -\frac{1}{4}$

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B

$$n \in \mathbb{N}; t \in$$

$$6) a) \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq t \leq n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1 - t^n}{1 - t} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t} \text{ d'où}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq t \leq n, \quad \frac{1}{1 - t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1 - t}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*$$

b) En intégrant la relation précédente sur $[0, n]$, sachant que

$$t \mapsto \frac{1}{1 - t} \text{ est continue sur } [0, 1[\text{, } t \mapsto \frac{t^n}{1 - t} \text{ continue sur }]0, 1[\text{, et}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad t \mapsto t^k \text{ continue sur } [0, 1[\text{, on a :}$$

$$\int_0^n \frac{1}{1 - t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n t^k dt = \sum_0^n \frac{t^n}{1 - t} dt \text{ par linéarité de l'intégration}$$

$$\text{Donc } [\ln(1 - t)]_0^n - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n t^k dt = \sum_0^n \frac{t^n}{1 - t} dt \text{ par linéarité de l'intégration}$$

$$\text{d'où } -\ln(1 - n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k+1} = \sum_0^n \frac{t^n}{1 - t} dt \text{ d'où}$$

$$-\ln(1 - n) - \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k} = \sum_0^n \frac{t^n}{1 - t} dt$$

$$\text{Conclusion: } \ln(n) \geq -\ln(1-n) - \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k} = \int_0^n \frac{t^n}{1-t} dt$$

Sont $n \in \mathbb{N}^*$

7) $t \in [0, n]$,

$$0 \leq t \leq n$$

$$0 \geq -t \geq -n$$

$$1 \geq 1-t \geq 1-n \quad \text{d'où}$$

$$0 < \frac{1}{1-t} < \frac{1}{1-n}$$

Pour ailleurs, $t \in [0, 1]$,

$t^n \geq 0$, d'où, comme $t \mapsto t^n$ continue sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 t^n dt = \int_0^n t^n dt + \int_n^1 t^n dt \quad \text{par}$$

$$\int_0^n t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^n - \int_n^1 t^n dt$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^1 t^n dt \quad \text{comme, } t \in [0, 1], t^n \geq 0, \text{ alors}$$

$$\int_n^1 t^n dt \geq 0$$

$$\frac{1}{n+1} - \int_n^1 t^n dt \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{d'où} \quad \int_0^n t^n dt \leq \frac{1}{n+1}$$

$t \in [0, n]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-n}$ être intégrer sur $[0, n]$ cette inégalité, comme $t \in [0, n]$, $t^n \geq 0$. or la parcellarice de l'intégration:

$$0 \leq \int_0^n \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^n \frac{t^n}{1-n} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-n)}$$

$$\text{Conclusion: } \ln(n) \geq -\ln(1-n) - \int_0^n \frac{t^n}{1-n} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-n)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(1-n)} = 0$, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_0^n \frac{e^n}{1-e} dt = 0$$

8) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k} = -\ln(1-n) - \sum_0^n \frac{e^n}{1-e} dt$$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_0^n \frac{e^n}{1-e} dt = 0$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n}$ croît et on a:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \text{ d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n} = -\ln(1-n)$$

9)a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ d'où: } m=a=1 \text{ et } b=-1,$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

9) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^m \frac{n^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{n^{k+1}}{k} - \frac{n^{k+1}}{k+1} \\ &= n \sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{n^{k+1}}{k+1} \\ &= n \sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n^k}{k} - n \right) = n \sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n^k}{k} + n \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k} = -\ln(1-n)$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k+1}$ existe et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k(k+1)} &= n(-\ln(1-n)) - (-\ln(1-n)) + n \\ &= -n\ln(1-n) + \ln(1-n) + n \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1}}{n(n+1)} = ((-n)\ln(1-n) + n) = \varphi(n)$$

1a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par telescopage, et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 = \varphi(1) \end{aligned}$$

PARTIE C

11) a) Soit $n \geq 2$

$B_k \geq 1$, B_k : "on tire une boule bleue au k^{e} tirage s'il a lieu"

B_k : "on tire une boule rouge au k^{e} tirage n'il a lieu"

$$B_k \geq 1, P(B_k) = P(B_k) = \frac{1}{2}, \text{ le tirage se fait au hasard.}$$

$$P(N=n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap B_{n-1})$$

$= P(B_1) P_{B_2}(B_2) \dots P_{B_1 \cap B_2 \dots B_{n-2}}(B_{n-1})$ d'après la formule des probabilités composées

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{Conclusion: } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P(N=n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$b) \quad \forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n k P(N=k) = \sum_{k=2}^n \frac{k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Comme la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge d'après Riemann, la série $\sum_{k=2}^{+\infty} k P(N=k)$

diverge donc N n'admet aucune espérance

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12) 1) fonction $N = \text{simule } N()$

$$b = 1$$

while $\text{rand}() < \frac{b}{b+1}$
 $b = b + 1$

end

$$N = b + 1$$

endfunction

13) a) UNEA,

$$\text{U}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}, P_{[N=n]}(T \leq n) = \frac{P([N=n] \cap [T \leq n])}{P(N=n)} =$$

$$\frac{P([N=n] \cap [\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq n])}{P(N=n)} = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq n)$$

comme les variables X_1, X_2, \dots, X_n et N sont indépendantes

$$\text{UNEER}, \text{U}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}, P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq n)$$

$$= P([X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n] \cap \dots \cap [X_n \leq n])$$

$= \prod_{k=1}^n P(X_k \leq n)$ comme X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes, et
 comme elles suivent toutes la même loi :

$$\text{UNEER}, \text{U}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}, P_{[N=n]}(T \leq n) = (F(n))^n$$

b) $N(n) = \{k; n \in \mathbb{N} \text{ avec } \{N=k\} / k \in \mathbb{N}\}$ forme un système complet d'évenements

D'où la formule des probabilités totales,

$$\text{t.c.r., } P(T \leq x) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([T \leq x] \cap [N=k])$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} P[N=k] (T \leq x) P(N=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} (F(x))^k \times \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(F(x))^k}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{k+1}}{(k+1)k} \quad \text{or, t.c.r., } F(x) \in (0, 1) \text{ d'où}$$

$$\text{t.c.r., } P(T \leq x) = \varphi(F(x))$$

14) a) fonction $T = \text{mimuleT}()$

$x = \text{rnorm}(1, 1, 'inf', 0, 1)$ (simulation de $F(x)$)

$$T = x + (1-x) * (\log(1-x))$$

END function

respectivement

b). La fonction mystère renvoie trois moyennes de 13 séries de 1000 simulations de la variable aléatoire T

On peut alors conclure que T admet une espérance et $E(T) = 0,75$

Ensuite, $P(T \leq n) = \varphi(F(n))$

De plus, $T = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Comme $\forall x \in [0, 1], X_k(x) = [0, 1]$ alors,

$\forall n < 0, P(T \leq n) = 0$ et, $\forall x \geq 1, P(T \leq n) = 1$.

At $\forall x \in [0, 1], P(T \leq n) = \varphi(F(n))$, or, $\forall n \in [0, 1], F(n) = n$, et

$F(0) = 0$, et $\varphi(0) = 0$ d'après.

$$\text{Ensuite, } P(T \leq n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ \varphi(n) \text{ si } n \in [0, 1] \\ 1 \text{ si } n \geq 1 \end{cases} = F_T(n)$$

d) $\varphi(0) = 0$.

$\lim_{n \rightarrow 1^-} \varphi(n) = 1$ D'o r F_T est continue sur $[0, 1]$, et F_T de classe C^1 sur

λ (comme φ de classe 1 sur $[0, 1]$) sauf exceptionnellement en 0 et 1.
D'o r T est une variable aléatoire  a densité

e) Soit f_T une densité de T . Ensuite,

$$f_T(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in]-\infty; 0[\cup]1, +\infty[\\ -\ln(1-n) \text{ si } n \in [0, 1] \end{cases}$$

Soit $a \in [0, 1]$.

$x \mapsto -x \ln(1-x)$ continue sur $[0, a]$. De plus, on pose : $\begin{cases} u(t) = t & u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = -\ln(1-t) & v'(t) = \frac{1}{1-t} \end{cases}$

les fonctions étant de classe C^1 sur $[0, a]$, on peut réaliser une intégration par parties : $\int_0^a -x \ln(1-x) dt = \left[-\frac{x^2}{2} \ln(1-x) \right]_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{2(1-x)} dt$

$$\int_0^a t \ln(1-t) dt = -\frac{a^2}{2} \ln(1-a) - \int_0^a \frac{t^2}{2(1-t)} dt$$

on pose alors : $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v(t) = \frac{1}{1-t} \end{cases}$

$$u'(t) = 2t \quad v'(t) = -\frac{1}{(1-t)^2}$$

Soit f_T une densité de T

alors, $f_T = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \text{ ou } n \geq 1 \\ \psi'(n) = -\ln(1-n) \text{ si } n \in [0, 1] \end{cases}$

Soit $a \in [0, 1]$, $t \mapsto tf'_T(t)$ continue sur $[0, a]$.

$$\int_0^a t f'_T(t) dt = \int_0^a t \psi'(t) dt \quad \text{alors, on a :} \quad \begin{cases} u(t) = t \quad v(t) = \psi(t) \\ u'(t) = 1 \quad v'(t) = \psi'(t) \end{cases}$$

les fonctions étant de classe C^1 sur $[0, a]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^a t \psi'(t) dt &= [t \psi(t)]_0^a - \int_0^a \psi(t) dt \\ &= a \psi(a) - \int_0^a \psi(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{or, } \lim_{a \rightarrow 1} \psi(a) = 1, \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \psi(t) dt = \frac{1}{4}$$

$$\text{d'où } \int_0^1 t f'_T(t) dt \text{ existe et } \int_0^1 t f'_T(t) dt = \frac{3}{4}$$

$$\text{Or } \int_{-\infty}^0 t f'_T(t) dt = 0 \text{ et } \int_{+\infty}^{+\infty} t f'_T(t) dt = 0 \text{ alors}$$

$$E(T) \text{ existe et } E(T) = \int_0^1 t f'_T(t) dt = \underline{\frac{3}{4}}$$

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15) a) Soit $X \in \mathcal{E}(1)$, et F_X une fonction de répartition de X .

$$\text{HnR}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) HnR, } F_T(n) = \varphi(F(n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \text{ car } \varphi(0) = 0 \\ 1 - e^{-\lambda n} + (e^{-\lambda n}) \ln(e^{-\lambda n}) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{HnR, } F_T(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 - e^{\lambda n} + (e^{-\lambda n})(-\lambda n) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } F_T(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_T(x) = \lim_{n \rightarrow 0^+} F_T(n)$$

F_T continue sur \mathbb{R} .

$n \rightarrow 1 - e^{\lambda n} + (e^{-\lambda n})(-\lambda n)$ de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et tant que somme et produit de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}_+

D'où F_T est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf au point $x=0$; T est donc une variable aléatoire à densité.

$$\text{De plus, HnR, } F_T(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ e^{-\lambda n}[-1 - \lambda n] + 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

D'où, une densité g de T sur \mathbb{R} :

$$\text{b) } g(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ -\lambda e^{-\lambda n} (-1 - \ln(-1 - \lambda n)) - \lambda e^{-\lambda n} & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ e^{-\lambda n} [\lambda + \lambda^2 n - 1] & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ e^{-\lambda n} (\lambda^2 n) & n \geq 0 \end{cases}$$

d)

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et comme $E(x_1^2)$ existe, puisque $V(x_1)$ existe, alors

$$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt \text{ existe et } E(x_1^2) = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$$

D'où, $\int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt$ existe donc $\int_0^{+\infty} \lambda t g(t) dt$ existe donc $E(T)$ existe

$$\text{De plus, } E(T) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \lambda E(x_1^2)$$

Pour autant, d'après Roeng-Haynes,

$$V(x_1) = E(x_1^2) - (E(x_1))^2 \text{ et } E(x_1^2) = V(x_1) + (E(x_1))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{soit } E(T) = \frac{2}{\lambda}$$

Probleme 2

Partie A

1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$M = M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \quad t_M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

$\lambda + 1 \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow \exists X \in M_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\} / MX = \lambda X$

$\Leftrightarrow (M - \lambda I_3) \notin \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+b-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+c-\lambda \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$$

\Leftrightarrow

Comme $M = t_M$, alors M est diagonalisable.

Conclusion : $t(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $M(a, b, c)$ est diagonalisable

2) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Supposons que $M(a, b, c)$ admette une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$

On pose $M = M(a, b, c)$

Comme M est diagonalisable, et que λ est sa unique valeur propre,

alors $\exists P \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}) / M = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_3$

Or $M = P \lambda I_3 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ce qui est absurde

Conclusion : $M(a, b, c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.

b) on pose $M = M(a, b, c)$

M est diagonalisable, donc elle admet au minimum une valeur propre, et comme $M \in M_3(\mathbb{R})$, alors elle admet au plus 3 valeurs propres distinctes.

Comme elle n'admet pas une seule valeur propre, alors M admet soit deux soit trois valeurs propres.

3) $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de \mathbb{R}^3

a) on a :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}^{e_1, e_2, e_3}$$

d'où $f(e_1) = (1+a, 1, 1)$

$f(e_2) = (1, 1+b, 1)$

$f(e_3) = (1, 1, 1+c)$

d'où la matrice de f dans la base B' est :

$$N(a, b, c) = \begin{pmatrix} f(e_2) & f(e_1) & f(e_3) \\ 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}^{e_2, e_1, e_3}$$

b) $M(b, a, c) = \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = N(a, b, c)$

Les valeurs propres de $M(b, a, c)$ sont les valeurs propres de $N(a, b, c)$

On sait que

λ est valeur propre de $M(a, b, c)$ si et seulement si λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de $M(b, a, c)$

d'où $\text{sp}(M(b, a, c)) = \text{sp}(N(a, b, c)) = \text{sp}(M(a, b, c))$

Conclusion : $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) Soit B'' la base de A^3 celle que $B'' = (e_1, e_3, e_2)$

Soit H la matrice représentative de f dans la base B''

$$H = \begin{pmatrix} p(e_1) & p(e_3) & p(e_2) \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{pmatrix}_{e_1, e_3, e_2}^{\circ} = M(a, c, b)$$

Sur AER.

On, $\lambda \in \text{Sp}(M(a, b, c)) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(H)$ (comme $M(a, b, c)$ et H sont deux matrices représentatives de f dans deux bases différentes)

$$\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(M(a, c, b))$$

d'où $\text{Sp}(M(a, b, c)) = \text{Sp}(M(a, c, b))$

D'où, les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres

Partie B

4) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ d'où

$J^2 = 3J$ d'où $J^2 - 3J = 0$, soit, en posant $P(X) = X^2 - 3X$,
P est un polynôme annulateur de J

b) $P(X) = X(X - 3)$ d'où, comme les valeurs propres de J sont également des racines de P, alors $\text{sp}(J) \subset \{0, 3\}$

Sa.t $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\bullet X \in E_0(S) \Leftrightarrow SX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -(u_2 + u_3)$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -u_2 - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $E_0(S) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ évidemment ces deux matrices ne sont pas

colinéaires, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(S)$

$$\bullet X \in E_3(S) \Leftrightarrow SX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_1 \\ 3u_2 \\ 3u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 \\ 3u_1 = 3u_2 \\ 3u_2 = 3u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $E_3(S) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_3(S)$

c) $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ en tant que concaténation de deux bases de deux sous-espaces propres de valeurs propres distinctes, et comme c'est une famille de 3 vecteurs, et $\dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, alors c'est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\text{So.t } B''' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

So.t P matrice de passage de B à B'''; P inventée

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$\Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$\Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$\Leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} P$$

$$\Leftrightarrow L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} P$$

$$\Leftrightarrow L_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} P \text{ mit } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{PPP^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{J}$$

$$\begin{aligned}
 5) a) \quad & P(aI_3 + D)P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} -a & -a & a+3 \\ a & 0 & a+3 \\ 0 & a & a+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \\
 & = M(a, a, a)
 \end{aligned}$$

b) $M(a, a, a)$ est semblable à une matrice diagonale de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$; les valeurs propres de $M(a, a, a)$ sont

donc a et $a+3$.

c) Soit $M = M(a, a, a)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$0 \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow M \notin G_{\mathbb{R}}(R)$

Donc M n'est inversible si et seulement si il ne possède pas valeur propre donc si et seulement si :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a+3 \neq 0 \end{cases}$$

Or: Si $a=0$ ou $a+3=0$, alors

$$a^2 + a^2 + a^2 + a^3 = 3a^2 + a^3 = (a+3)a^2 = 0 \text{ et plus,}$$

Si $(a+3)a^2 = 0$ alors $a=0$ ou $a+3=0$ donc

$$\begin{cases} a=0 \\ \text{ou} \\ a+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow 3a^2 + a^3 = 0 \text{ donc } \begin{cases} a \neq 0 \Leftrightarrow 3a^2 + a^3 \neq 0 \\ a+3 \neq 0 \end{cases}$$

donc M est inversible $\Leftrightarrow 3a^2 + a^3 \neq 0$.

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Réddiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C

$$6) a) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{0 \in \text{Sp}(C)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE



