Code épreuve : 287	Nombre de pages : 18	Session : 2021

Épreuve de : MATHS

E9-00059
304801
Maths 2E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie

1) a) Soit $r \in [\![1;4]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 1 + x^4 - x^\sigma$

f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 4x^3 - \sigma x^{\sigma - 1}$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4x^3 \geqslant \sigma x^{\sigma-1}$

~~$k \to x^k$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme $x > 0$~~

~~Or, $\sigma \leqslant 4$, et~~ ~~$\sigma - 1 \leqslant 3$ et~~ ~~(comme $k \to k^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$)~~

~~$x^{\sigma-1} \leqslant x^3$ d'où $\sigma x^{\sigma-1} \leqslant \sigma x^3 \leqslant 4x^3$~~

~~D'où, f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$~~
~~$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ d'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 1$ soit $1 + x^4 - x^\sigma \geqslant 1$ donc~~

~~$1 + x^4 - x^\sigma \geqslant 0$ d'où $1 + x^4 \geqslant x^\sigma$~~

(voir fin SVP DSL)

~~de plus, si $x = 0$, on a également $1 + x^4 \geqslant x^\sigma$.~~

~~Conclusion : Comme $X_1(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, $\forall \sigma \in [\![1;4]\!]$, $X_1^\sigma \leqslant 1 + X_1^4$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

ii) Soit $r \in [\![1;4]\!]$,

$X_1^r \leq 1 + X_1^4$, $X_1^r - 1 \leq X_1^4$

Comme $E(X_1^4)$ existe, alors, $E(X_1^r - 1)$ existe.

Or, par linéarité de l'espérance, $E(X_1^r - 1) = E(X_1^r) - 1$

Conclusion : $E(X_1^r)$ existe. D'où, $\forall r \in [\![1;4]\!]$, $E(X_1^r)$ existe.

iii) $X_1(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, d'où $E(X_1) \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que $\mu = 0$

Dans ce cas, $E(X_1) = 0$. Comme $X_1(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$,

alors cela signifie que $P(X_1 = 0) = 1$. Or, cela est impossible.

Conclusion : $\mu \in \mathbb{R}_+$ mais $\mu \neq 0$, alors $\mu > 0$.

iv) $(X_1 - \mu)^4 = \left((X_1 - \mu)^2\right)^2 = \left(X_1^2 - 2\mu X_1 + \mu^2\right)^2 =$

$(X_1^2 - 2\mu X_1)^2 + 2(X_1^2 - 2\mu X_1)\mu^2 + \mu^4 =$

$X_1^4 - 4\mu X_1^3 + 4\mu^2 X_1^2 + 2X_1^2\mu^2 - 4\mu^3 X_1 + \mu^4 = X_1^4 - 4\mu X_1^3 + 6\mu^2 X_1^2 - 4\mu^3 X_1 + \mu^4$

- $E(X_1^4)$ existe. $E(-4\mu X_1^3)$ existe comme $E(X_1^3)$ existe et $-4\mu \in \mathbb{R}$

. $E(6\mu^2 X_1^2)$ existe comme $6\mu^2 \in \mathbb{R}$ et $E(X_1^2)$ existe

. $E(-4\mu^3 X_1)$ existe comme $-4\mu^3 \in \mathbb{R}$ et $E(X_1)$ existe

comme $\mu^4 \in \mathbb{R}$, $E(\mu^4)$ existe

Conclusion : $E((X_1 - \mu)^4)$ existe, $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4

2) a) $\forall n \geq 1$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = [A_n \cup A_{n+1} \cup \dots] = A_n \cup (A_{n+1} \cup \dots)$
$= A_n \cup B_{n+1}$

d'où, $B_{n+1} \subset B_n \quad \forall n \geq 1$

$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$

b)

c) $P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$

or, comme $B_{n+1} \subset B_n$,

$P(B) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n)$

d) Soit C et D deux évenements

$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$ d'après la formule du crible. or,

$P(C \cap D) \geq 0$ entant que probabilité, d'où

$P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leq P(C) + P(D)$ d'où

$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D)$

e) Soit $(C_n)_{n \geq 1}$ une suite d'évemants

$\forall n \geq 1$, $P(n)$: " $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(C_k)$ "

. Si $n=1$, on a bien $P(C_1) = P(C_1)$

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vérifié.

$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(C_k)$. or, $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} C_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(C_k) + P(C_{n+1})$ d'après la question précédente

d'où $P(n+1)$ est vérifié.

Cnclence : $P(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(C_k)$

D'où, on a : $\forall n \geq 1$, $\forall N \geq n$,

$$0 \leq P(\bigcup_{k=n}^{N} A_k) \leq \sum_{k=n}^{N} P(A_k)$$

en faisant tendre N vers $+\infty$, comme $P(B_n)$ existe et $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ existe,

on a : $\forall n \geq 1$, $P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$

f) $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$ puisque la série $\sum P(A_n)$ cvge.

Comme, $\forall n \geq 1, 0 \leq P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$, alors par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$

Soit $P(B) = 0$

3) a) $(Y_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes, de même loi. De plus, $\forall k \geq 1$, $E(Y_k) = 0$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n} = \frac{\Sigma_n}{n}$

D'après le théorème de la loi faible des grands nombres,

$\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P(|H_n - E(Y_1)| > \varepsilon) = 0$ d'où

$\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P(|\frac{\Sigma_n}{n}| > \varepsilon) = 0$

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $|\frac{\Sigma_n}{n}| > \varepsilon$, alors, comme $x \to x^4$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$(|\frac{\Sigma_n}{n}|)^4 > \varepsilon^4$ soit $(\frac{\Sigma_n}{n})^4 > \varepsilon^4$. $(|\frac{\Sigma_n}{n}| > \varepsilon) \subset \left((\frac{\Sigma_n}{n})^4 > \varepsilon^4\right)$

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

. Si $\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4$, comme $x \to \sqrt{x}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^2 > \varepsilon^2$, et

$\left(\sqrt{\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^2}\right) > \varepsilon$ soit $\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon$ d'où

$\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right|^4 > \varepsilon^4\right) \subset \left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$

Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right|^4 > \varepsilon^4$ est équivalent à l'événement $\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon$ d'où,

$\forall n \geqslant 1$, $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right|^4 > \varepsilon^4\right) = P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$

ii) On pose, $\forall n \geqslant 1$, $H'_n = \left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $H'_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$, en supposant que $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ ne sont pas toutes nulles.

. D'après l'inégalité de Markov, $\forall a > 0$

$P(H'_n > a) < \frac{E(H'_n)}{a}$ d'où, comme $\varepsilon^4 > 0$,

$P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) < \frac{E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)}{\varepsilon^4}$

. Si $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ sont toutes nulles, $\Sigma_n = 0$ d'où, on a :

$P\left(\frac{(\Sigma_n)^4}{n^4} > \varepsilon^4\right) = 0$, et $E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = 0$ d'où $\frac{1}{\varepsilon^4} E\left(\frac{(\Sigma_n)^4}{n}\right) = 0$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) \leqslant \frac{E\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4}{\varepsilon^4}$ d'où

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$

iii)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

iv) Comme, $\forall k \in [1;n]$, $E(Y_k^4)$ admet espérance, et $E(Y_k^2)$ et $E(Y_k)$ également.

Donc, $E(\Sigma_n^4)$ existe et

$$E((\Sigma_n)^4) = E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq k}^{n} Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k W_k\right)$$

et, par linéarité de l'espérance, et par indépendance des variables $(Y_1, \dots Y_n)$, et d'après le lemme des coalitions, on a :

$$E((\Sigma_n)^4) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k^4) + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq k}^{n} E(Y_k^2)E(Y_j^2) + \sum_{k=1}^{n} E(Y_k)E(W_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \rho^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq k}^{n} \sigma^4 \quad \text{comme } E(Y_k) = 0$$

$$= n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; E((\Sigma_n)^4) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4$

v) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

par linéarité de l'espérance

$$n^2 E\left(\frac{(\Sigma_n)^4}{n^4}\right) = \frac{n^2}{n^4}\left(n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4\right) = \frac{1}{n^2}\left(n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4\right)$$

$$= \frac{\rho^4}{n} + \frac{3(n-1)n\sigma^4}{n^2}$$

or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\mu^4}{n} \leq \mu^4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 \leq n$ d'où $(n-1)n \leq n^2$

soit $\frac{(n-1)n}{n^2} \leq 1$ d'où

$$\frac{3(n-1)n\sigma^4}{n^2} \leq 3\sigma^4 \quad \text{comme} \quad 3\sigma^4 \geq 0$$

$$\text{d'où} \quad n^2 E\left(\frac{(\Sigma_n)^4}{n^4}\right) \leq \mu^4 + 3\sigma^4$$

or, $\mu^4 + 3\sigma^4 \in \mathbb{R}_+$. $\exists C > 0$ / $C > \mu^4 + 3\sigma^4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$n^2 E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) < C$$

Conclusion: $\exists C > 0$ / $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leq \frac{C}{n^2}$$

vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{n^{1/8}}\right)^4} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$ d'où

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq \sqrt{n}\,\frac{C}{n^2} \quad \text{d'où}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq \frac{C}{n^{3/2}}$

4) a) $\forall n \geq 1$, $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right]$

a) $\forall n \geq 1$, $0 \leq P(A_n) \leq \frac{C}{n^{3/2}}$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ cvge, d'après Riemann, comme $\frac{3}{2} > 1$, alors

$\sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^{3/2}}$ cvge et, d'après le théorème de comparaison des séries

de termes positives, $\sum_{n \geq 1} P(A_n)$ cvge.

4) b) Comme $\sum_{n \geq 1} P(A_n)$ cvge, $\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$

c) $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{\varepsilon_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) = 0$ donc

$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{\varepsilon_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n^{1/8}}\right) = 1$ donc, ~~(pour A~~ ~~)~~ il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$

tel que $\forall n \geq n_1$, $-\frac{1}{n^{1/8}} \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n^{1/8}}$.

or, comme $\left(-\frac{1}{n^{1/8}} \leq \frac{\varepsilon_n}{n} \leq \frac{1}{n^{1/8}}\right) \subset \left\{\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0\right\}$ par encadrement,

alors $\forall n \geq n_1$, $P\left(-\frac{1}{n^{1/8}} \leq \frac{\varepsilon_n}{n} \leq \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0\right)$

donc, comme, $\forall n \geq n_1$, $P\left(-\frac{1}{n^{1/8}} \leq \frac{\varepsilon_n}{n} \leq \frac{1}{n^{1/8}}\right) = 1$,

$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0\right) = 1$.

d) $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = E(X_1)$, $\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

En raisonnant par analogie avec la question 3, comme $(X_k)_{k\geq 1}$ est également une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes, et de même loi, avec pour espérance μ, et

comme $E\left((X_1-\mu)^4\right)$ existe, alors, comme,

$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = E(Y_1)\right) = 1$, alors

$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1$.

5) a)

Emplacement QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Deuxième partie

6) a) $N_s = \max(k \in \mathbb{N},\ S_k \leq s)$

$N_t = \max(k \in \mathbb{N},\ S_k \leq t)$ ~~et comme $t \geq s$~~

~~alors $\max(k \in \mathbb{N},\ S_k \leq t) = \max(k \in \mathbb{N})$~~

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $N_t = k$

Si $s < S_k \leq t$, alors $N_t > N_s$

Si $S_k \leq s$, alors $N_t = N_s$ comme $t \leq s$

d'où $N_s \leq N_t$

6) b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

. Si $N_t \geq n$, alors $\exists k \geq n \ / \ S_k \leq t$. or, comme $k \geq n$, d'après la question précédente, $S_n \leq t$. $[N_t \geq n] \subset [S_n \leq t]$.

. Si $S_n \leq t$, alors si n est le plus grand entier tel que $S_n \leq t$, alors $N_t = n$, et si ça ne l'est pas, $N_t > n$
d'où $[S_n \leq t] \subset [N_t \geq n]$

Conclusion : $[S_n \leq t] = [N_t \geq n]$

c)
d) Soit $w \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ et $N_\infty(w) = k$

~~Donc, $K = \max\{k \in \mathbb{N}, S_k\}$ soit~~

donc $K = \{k \in N / \forall i \in N, S_i \leq S_k\}$

Donc il existe $T_W > 0$ tel que $\forall t \geq T_W, N_t(\omega) = K$, T_W étant la valeur de t permettant d'avoir $S_K \leq t$ et aussi, pour toute valeur t supérieure à T_W, comme ~~S_K~~

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : | Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

7) function N = renouvellement (t)

N = 0;

S = 0;

while S + X <= t

N = N + 1

end function

8) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$. $N(t) = N$ on a :

$P(N_t = n) + P(N_t \geq n+1) = P(N_t \geq n)$, d'où

$P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \geq 0$, $F_n(t) = P(S_n \leq t)$

i) $\forall t \geq 0$, $F_0(t) = P(S_0 \leq t) = P(0 \leq t) = 1$

$F_1(t) = P(S_1 \leq t) = P(X_1 \leq t) = F(t)$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$

$= F_n(t) - F_{n+1}(t)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9) Soit $j \in \mathbb{N}$, ~~$\{k \mid P(U=k) \neq 0\}$~~

$P_{[U=k]}(V=j) = P_{[U'=k]}(V'=j)$ d'où

$$\frac{P([U=k] \cap [V=j])}{P([U=k])} = \frac{P([V'=j] \cap [U'=k])}{P(U'=k)}$$

comme U et U' suivent la même loi,

$$P([U=k] \cap [V=j]) = P([V'=j] \cap [U'=k])$$

or, $\{P(U=k), k \in \mathbb{N}\}$ forme un système complet d'événement. d'où,

d'après la formule des probabilités totales :

$P(V=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([U=k] \cap [V=j])$. D'où :

$\sum_{k=0}^{+\infty} P([U=k] \cap [V=j]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([V'=j] \cap [U'=k])$ soit

$P(V=j) = P(V'=j)$

Conclusion : $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(V=j) = P(V'=j)$, V et V' suivent la même loi

10) $W = \min\{k \geq 1, Z_k = 1\}$

a) Soit $i \geq 1$.

$P(W=i) = P(\min\{k \geq 1, Z_k = 1\} = i) = P([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0] \cap \dots [Z_i = 1])$ or, comme $(Z_1, Z_2, \dots Z_i)$ sont indépendantes, $P(W=i) = P(Z_1 = 0) P(Z_2 = 0) \dots P(Z_i = 1)$
$= (1-p)^{i-1} p$. $\forall i \geq 1$, $P(W=i) = (1-p)^{i-1} p$

b) $\forall n \geq 1, \ W_n = \min\left(k \geq 1, \ \sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right)$

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n$.

$$P(W_n = k) = P\left(\min\left(k \geq 1, \sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right) = k\right)$$

$$= P\left(\left[\sum_{\ell=1}^{1} Z_\ell < n\right] \cap \left[\sum_{\ell=1}^{2} Z_\ell < n\right] \ldots \ldots \left[\sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right]\right)$$

$$= P\left(\left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell < n\right] \cap \left[\sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right]\right)$$

$$\cancel{= P\left(\left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z\right.\right.}$$

$\left\{\left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = j\right], j \in \mathbb{N}\right\}$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(W_n = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell < n\right] \cap \left[\sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right] \cap \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = j\right]\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} P\left(\left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = j\right] \cap \left[\sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right]\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} P\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = j\right) P_{\left[\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = j\right]}\left(\sum_{\ell=1}^{k} Z_\ell = n\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} P\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = j\right) P(Z_k = n - j)$$

$$= P\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = n-1\right) P(Z_k = 1) \quad \text{comme } Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$$

Or, $\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell$ est une somme de $(k-1)$ variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, donc $\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell \hookrightarrow B((k-1), p)$.

D'où, $P\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} Z_\ell = n-1\right) P(Z_k = 1) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{k-n} \times p$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n$, $P(W_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^{n} (1-p)^{k-n}$

ii) $\forall k \geq n$, $\forall j \geq k+1$,

$$P_{[W_n = k]}(W_{n+1} = j) = \frac{P([W_{n+1} = j] \cap [W_n = k])}{P(W_n = k)} = \frac{P\left([Z_j = 1] \cap [Z_{j-1} = 0] \cap \ldots [Z_{k+1} = 0] \bigcap_{}^{j} [W_n = k]\right)}{P(W_n = k)}$$

or, par indépendance des Z_n, on a :

$$P_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j) = \frac{p(1-p)^{j-k-1}P([W_n=k])}{P(W_n=k)} = p(1-p)^{j-k-1}$$

$\forall k \geq n, \; \forall j \geq k+1, \; P_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j) = p(1-p)^{j-k-1}$

c) i) $\forall i \geq 1, \; P([X_1=i]) = p(1-p)^{i-1}$

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, j et k / $j \geq k+1$.

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = P_{[\sum_{i=1}^{n} X_i = k]}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i = j\right)$$

$$= \frac{P\left([\sum_{i=1}^{n} X_i = k] \cap [\sum_{i=1}^{n+1} X_i = j]\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)}$$

$$= \frac{P([\sum_{i=1}^{n} X_i = k] \cap [X_{n+1} = j-k])}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)}$$

or, comme $(X_1, X_2, \dots X_n, X_{n+1})$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, on a :

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = P([X_{n+1}=j-k]) = p(1-p)^{j-k-1}$$

D'où, $\forall n \geq N^*$, $\forall j \geq k+1$,

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = p(1-p)^{j-k-1}$$

~~$\forall n \geq 1$~~

~~ii) on a, pour tout j et k tel que $j \geq k+1$, et $P(S_n=k) \neq 0$:~~

~~$P_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = P_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j)$ D'après la question 9,~~

~~$(S_{n+1})_{n \geq}$ et~~

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2021

Épreuve de : MATHS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

ii) $\forall n \geq 1$, $P(n)$: " S_n suit la même loi que W_n "

Si $n=1$: . $S_1 = X_1$ d'où $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(S_1 = i) = p(1-p)^{i-1}$

. $\forall k \geq 1$, $P(W_1 = k) = \binom{k-1}{0} p^1 (1-p)^{k-1} = p(1-p)^{k-1}$

S_1 et W_1 suivent bien la même loi

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vérifié.

Comme, $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^*$ tels que $j \geq k+1$,

$P_{[S_n = k]}(S_{n+1} = j) = P_{[W_n = k]}(W_{n+1} = j)$, sachant que S_n et W_n suivent la même loi, alors S_{n+1} et W_{n+1} suivent la même loi d'après (3).

Conclusion : $\forall n \geq 1$, S_n suit la même loi que W_n

d) $\forall t \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$

$= \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(S_n = k) - \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(S_{n+1} = k)$ comme S

Or, comme $S_n(\Omega) = [\![n ; +\infty [\![$, comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P(N_t = n) = \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^k (1-p)^{k-n}$ $- \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Troisième partie

1) a) $\forall t \geq 0$,

$$S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i = \sum_{i=1}^{\max(k \in \mathbb{N}, S_k \leq t)} X_i$$

2) b) $\forall n \geq 1$, $E(Y_n) = n P(U \leq \frac{1}{n})$ comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, or $\forall n \geq 1$, ...

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$, alors $P(U \leq \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ donc $\forall n \geq 1$, $E(Y_n) = 1$.

Reprise 1) a)

$f'(x) \geq 0 \iff 4x^3 \geq \sigma x^{\sigma-1}$

$\iff \ln(4x^3) \geq \ln(\sigma x^{\sigma-1})$ comme ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln 4 + 3\ln x \geq \ln\sigma + (\sigma-1)\ln x$

$\iff \ln 4 - \ln\sigma \geq (3+\sigma-1)\ln x$

$\iff (\sigma-4)\ln x \leq \ln\left(\frac{4}{\sigma}\right)$

Non abouti...