PREPA 2021 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique

501610

BENHAMOU

NATHAN

Note de délibération : 19.6 / 20

Numéro d'i

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MAKLOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques - Voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 08

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1 :

Partie 1 :

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -3A$$

on a donc bien $\underline{A^3 = -3A}$

On en déduit donc que $X^3 + 3X$ est un polynôme

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

annulateur de A, or, on sait d'après le cours que les valeurs propres de A sont incluses dans les racines de son polynômes annulateurs.
et on a :

$$X^3+3X=0 \Rightarrow X(X^2+3)=0 \Rightarrow X=0 \text{ ou } X^2+3=0$$

or, X^2+3 n'a aucune solutions réelles, on déduit donc que $Sp(A) \subset \{0\}$
or, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que A possède au moins une valeurs propre, on déduit donc que

$\underline{Sp(A) = \{0\}}$

Supposons que A soit diagonalisable, A serait alors semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, c'est-à-dire que A serait semblable à la matrice nulle, or la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle, donc A serait la matrice nulle, ce qui est absurde.
<u>on déduit donc que A n'est pas diagonalisable</u>

2. J et S sont des matrices symétriques réelles, d'après le cours, on sait donc que J et S sont diagonalisables.

et on a :

$$SJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $$JS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a donc bien $SJ = JS$

3. Soit $X \in E_0(S)$, $X \neq 0$, $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ on a :

$SX = 0$ $\cancel{\Rightarrow JSX = 0 \Rightarrow SJX = 0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

donc $E_0(S) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ car on a bien $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

et on a :

$$J\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre 3.

Soit $X \in E_{\sqrt{3}}(S)$, $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, on a :

$$SX = \sqrt{3}X$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{3}x \\ -x + z = \sqrt{3}y \\ y - z = \sqrt{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\sqrt{3}) = y \\ -x + z = \sqrt{3}x(1-\sqrt{3}) \\ y - z = \sqrt{3}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(1-\sqrt{3}) = y \\ -x + z = \sqrt{3}x - 3x \\ y - z = \sqrt{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x(1-\sqrt{3}) \\ z = \sqrt{3}x - 2x = x(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

on a donc $E_{\sqrt{3}}(S) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}\right)$ (on a bien $\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix} \neq 0$)

et on a :

$$J\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre 0 (J est de rang 1 donc $0 \in Sp(J)$)

Numéro d'inscription 501610

Né(e) le 03/08/2000

Signature

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MAKLOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques - Voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

et on a :

Soit $X \in E_{-\sqrt{3}}(S)$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$:

$SX = -\sqrt{3}X$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = -\sqrt{3}x \\ z - x = -\sqrt{3}y \\ y - z = -\sqrt{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x(1+\sqrt{3}) \\ z - x = -\sqrt{3}x(1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x(1+\sqrt{3}) \\ z - x = -\sqrt{3}x - 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x(1+\sqrt{3}) \\ z = -\sqrt{3}x - 2x = x(-\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

donc $E_{-\sqrt{3}}(S) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix}\right)$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \neq 0\right)$

et on a bien $J\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre 0.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

Ainsi, tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.

4. Comme S et J sont diagonalisables et que ils ont même vecteur propre, on a déduit d'après le cours qu'il existe une matrice P inversible formée des vecteurs propres de J (et donc aussi de S) et une matrice D_1 diagonale formée des valeurs propres de J et une matrice D_2 diagonale formée des valeurs propres de S tels que :

$D_1 = PJP^{-1}$ et $D_2 = PSP^{-1} \Rightarrow P^{-1}JP = D_1$ et $P^{-1}SP = D_2$

Il existe donc bien une matrice P inversible de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 :

5. Soit $(M, N) \in M_n(\mathbb{R})$, on a : et λ un réel

$$f_1(\lambda M + N) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda m_{1,j} + n_{1,j}) \quad \left(\text{car on a : } \begin{pmatrix} \lambda m_{11} & \cdots & \lambda m_{1n} \\ x & x & x \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1n} \\ x & \cdots & x \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda m_{11} + n_{11} & \cdots & \lambda m_{1n} + n_{1n} \\ x & \cdots & x \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix}\right)$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} + \sum_{j=1}^{n} n_{1,j} = \lambda f_1(M) + f_1(N)$$

donc f_1 est bien une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

6. • $K_n \subset E_n$ (par définition)

• la matrice nulle appartient à K_n (car la somme des coefficients de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est bien égale (et vaut 0))

• Soit $(M, N) \in (K_n)^2$ et λ un réel, on a :

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda m_{11} + n_{11} & \cdots & \lambda m_{1n} + n_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda m_{n1} + n_{n1} & \cdots & \lambda m_{nn} + n_{nn} \end{pmatrix}$$

or, on a :

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ l_i(M) = l_i(N) = 0$

$\forall j \in [\![1, n]\!],\ c_j(M) = c_j(N)$

et $d_1(M) = d_2(M) = d_1(N) = d_2(N) = 0$

or, d'après la question 5 (avec un raisonnement identique) on a déduits que toutes ces formes sont linéaires.

on a donc :

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ l_i(\lambda M + N) = \lambda l_i(M) + l_i(N) = 0 + 0 = 0$

$\forall j \in [\![1, n]\!],\ c_j(\lambda M + N) = \lambda c_j(M) + c_j(N) = 0 + 0 = 0$

$d_1(\lambda M + N) = \lambda d_1(M) + d_1(N) = 0$ et $d_2(\lambda M + N) = \lambda d_2(M) + d_2(N) = 0$

donc $\lambda M + N \in K_n$.

Ces trois points montrent donc que :

<u>K_n est un sous-espace vectoriel de E_n.</u>

7. la diagonale de ${}^tM$ est la même que celle de M on a donc $d_1(M) = d_1({}^tM)$

de plus, la somme des lignes de ${}^tM$ est la même que celle

des colonnes de M et la somme des colonnes de ${}^tM$ est la même que celle des lignes de M.
et la somme de l'autre diagonale n'est également identique.
On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $c_i(M) = c_j({}^tM)$, $d_1(M) = d_2({}^tM)$

~~$\forall i \in [\![1,n]\!]$~~ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_i({}^tM) = c_j(M)$
et $d_2(M) = d_2({}^tM)$
donc si $M \in \mathcal{E}_n$, alors ${}^tM \in \mathcal{E}_n$ et on a $S({}^tM) = S(M)$

8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$, on remarque déjà que $J_n \in \mathcal{E}_n$ avec $S(J) = n$
et on a :
~~$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $c_i(M - \lambda J_n) = c_i(M) - \lambda c_i(J_n)$~~
$= c_i$

$$S(M - \lambda J_n) = S(M) - \lambda S(J_n)$$

$$= S(M) - \lambda n$$ (car S est une forme linéaire, on montrait cela comme à la question 5)

or, $S(M - \lambda J_n) = 0 \Rightarrow S(M) - \lambda n = 0$
$\Rightarrow S(M) = \lambda n \Rightarrow \lambda = \frac{S(M)}{n}$

donc, il existe bien un unique réel λ ($\lambda = \frac{S(M)}{n}$) tel que $M - \lambda J_n \in K_n$

Numéro

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MAKLOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques - Voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 08

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$, on a :

$$MW_n = M\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j}\end{pmatrix}$$

or, $M \in \mathcal{E}_n$, donc pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = S(M)$$

donc $MW_n = \begin{pmatrix}S(M)\\ \vdots \\ S(M)\end{pmatrix} = S(M)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = S(M)\,W_n$

donc, comme $W_n \neq 0$, on en déduit que W_n est bien un vecteur propre de M associé à la valeur propre $S(M)$.

10. On remarque que A, J et S vérifient bien les propriétés des matrices magiques définies en partie 2. et on a :

$S(A) = 0$ $\quad S(J) = 3$ et $S(S) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

11. Montrons par analyse-synthèse que $\mathcal{A}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) + \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \supset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (en notant $A_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et $S_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ respectivement l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

<u>analyse</u>: soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on cherche $M_1 \in A_n(\mathbb{R})$ et $M_2 \in S_n(\mathbb{R})$ tel que : $M = M_1 + M_2$

on a : ${}^tM = -M_1 + M_2$

$$\text{donc} \quad M_2 = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad M_1 = \frac{M - {}^tM}{2}$$

<u>Synthèse</u>:

Montrons que $M_2 \in S_n(\mathbb{R})$ et $M_1 \in A_n(\mathbb{R})$

on a : ${}^tM_2 = \frac{{}^tM + M}{2} = M_2$ et ${}^tM_1 = \frac{{}^tM - M}{2} = -\frac{M - {}^tM}{2} = -M_1$

donc $M_2 \in S_n(\mathbb{R})$ et $M_1 \in A_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, on en déduit que $\mathcal{A}_n(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) + S_n(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \supset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

de plus, $S_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) + \mathcal{A}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (comme somme de sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). On en déduit donc par double inclusion que $\underline{A_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) + S_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

et on a également :

$\underline{A_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \cap S_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \{0\}}$ (car la seule matrice appartenant à ces deux ensembles est la matrice nulle) on en déduit donc que :

$$\underline{A_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \oplus S_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

donc, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe bien un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que : (la supplémentarité assure l'unicité)

$$M = M_1 + M_2 \text{ avec } \begin{cases} M_1 \in \mathcal{A}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \\ M_2 \in \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \end{cases}$$

et on a $\underline{M_1 = \dfrac{M - {}^tM}{2} \text{ et } M_2 = \dfrac{M + {}^tM}{2}}$

12.

a) on a déjà montré en partie 2 que $s(M) = s({}^tM)$ et que s est une forme linéaire.

Donc, si $M \in K_3$, on a : $s(M) = 0$

et $s(M_1) = s\left(\dfrac{M - {}^tM}{2}\right) = \dfrac{1}{2} s(M) - \dfrac{1}{2} s({}^tM) = 0 - 0 = 0$

et $s(M_2) = s\left(\dfrac{M + {}^tM}{2}\right) = \dfrac{1}{2} s(M) + \dfrac{1}{2} s({}^tM) = 0 + 0 = 0$

donc $\underline{M_1 \text{ et } M_2 \text{ appartiennent bien à } K_3.}$

b) on remarque que $A \in \mathcal{A}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et $S \in \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et on a aussi : $A \in K_3(\mathbb{R})$ et $S \in K_3(\mathbb{R})$

~~on a donc : $s(M_1 - \lambda A) = s(M_1) - \lambda s(A)$~~

~~$= 0$~~

~~donc $s(M_1) = \lambda s(A)$~~

Comme M_1 et A sont antisymétrique et leur somme de chaque ligne, colonne et diagonale sont nuls, on en déduit que M_1 et A sont colinéaires soit donc, qu'il existe λ tel que $M_1 = \lambda A$.

et, comme M_2 et S sont symétriques et que leur

somme de chaque ligne, colonne et diagonale vaut la même somme nulle, on en déduit que M_2 et S sont colinéaires et donc qu'il existe β tel que $M_2 = \beta S$.

Ainsi, il existe bien deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \text{ et } M_2 = \beta S.$$

---

13. On a donc,

$$\forall M \in \mathcal{M}_3, \quad \underset{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,}{} \quad M = \alpha A + \beta S$$

on en déduit donc, comme $\dim(\mathcal{M}_3) = \mathrm{card}(A, S)$
(sinon on aurait $\dim(\mathcal{M}_3) = \dim(\mathcal{E}_3)$ et comme $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{E}_3$, alors $\mathcal{M}_3 = \mathcal{E}_3$ ce qui est absurde)
et que la famille (A, S) est libre car $A \in \mathcal{A}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et $S \in \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$

Donc, $\underline{(A, S) \text{ forme une base de } \mathcal{M}_3}$.

on en déduit donc, comme $J \in \mathcal{E}_3$ et que $J \notin \mathcal{M}_3$ et que $J \neq 0$, et donc par une concaténation de base de $\mathcal{M}_3$ et de $\mathcal{E}_3 \setminus \mathcal{M}_3$ (avec $\dim(\mathcal{E}_3 \setminus \mathcal{M}_3) = 1$)

que $\underline{(A, J, S) \text{ forme une base de } \mathcal{E}_3}$.

14. Avec un raisonnement identique à la question 12, on montrerait que :

$$\forall M \in \Delta, \ \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } M = \alpha J + \beta S$$

(car $P^{-1}AP$ n'est pas diagonale car A n'est pas diagonalisable)
et que comme (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$, alors,

Numéro

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MAKLOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 08

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

pour tout M de $M_3(\mathbb{R})$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$M = \alpha I + \beta S + \gamma A$. (avec ici $\gamma = 0$)

et donc, on a bien $\Delta = \mathrm{Vect}(I, S)$

Problème :

1

ou on peut proposer le script suivant :

```
Function V = Sim_V(n, a)
input('n')
input('a')
Z = grand(7, n, unif, 0, a)
V = max(Z)
disp(V)
```

b) on voit que les 5 réalisations se rapproche de 1, mais qu'elles ne sont pas toutes égales à 1.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

on pourrait donc conjecturer <u>que l'estimateur V_n est asymptotiquement sans biais.</u> (car les 5 réalisations se rapproche de plus en plus de 1 plus le nombre est grand).

2.

a) d'après le cours, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_{V_n}(x) = P(V_n \leq x)$$

$$= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq x\}\right)$$

par mutuelle indépendance $= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$

$$= \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x) = (F_{X_1}(x))^n$$ (car tous les variables aléatoires suivent la même loi)

on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{V_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

---

c) . F_{V_n} est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]a, +\infty[$ comme fonction constante

F_{V_n} est continue sur $[0, a]$ comme fonction polynômiale et on a $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{V_n}(x) = 0 = F_{V_n}(0)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} F_{V_n}(x) = 1 = F_{V_n}(a)$

donc F_{V_n} est continue en 0 et en a. Donc F_{V_n} est continue sur $\mathbb{R}$ entier.

- F_{V_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]a, +\infty[$ comme fonction constante.

  F_{V_n} est de classe C^1 sur $[0, a]$ comme fonction polynômiale.

  Donc F_{V_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en a.

- on a $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{V_n}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{V_n}(x) = 0$

Ces trois points montrent donc que F_{V_n} est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et donc que <u>V_n est une variable aléatoire à densité.</u>

En dérivant F_{V_n} on trouve une densité (et on pose $f_{V_n}(0) = f_{V_n}(a) = 0$)

on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{V_n}(x) = \begin{cases} \frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

---

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x f_{V_n}(x)$ est continue sur $[0, a]$ donc V_n admet bien une espérance et on a :

$$E(V_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{V_n}(x)\, dx$$

$$= \int_0^a x f_{V_n}(x)\, dx \qquad (f_{V_n} \text{ est nulle ailleurs})$$

$$= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^n\, dx$$

$$= \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \underline{\frac{n}{n+1} a}$$

on a donc $E(V_n) = \frac{n}{n+1} a \neq a$

<u>donc l'estimateur V_n n'est pas sans biais.</u>

4. Soit $\varepsilon > 0$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = 1 - P(|V_n - a| \leq \varepsilon)$$

$$= 1 - P(-\varepsilon \leq V_n - a \leq \varepsilon)$$

$$= 1 - P(-\varepsilon + a \leq V_n \leq \varepsilon + a)$$

$$= \underline{1 - (F_{V_n}(\varepsilon + a) - F_{V_n}(a - \varepsilon))}$$

comme $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon + a > a$ donc $F_{V_n}(\varepsilon + a) = 1$
et $a - \varepsilon < a$ ~~(on prend ε tel que)~~ on a donc :
$F_{V_n}(a - \varepsilon) = \left(\frac{a - \varepsilon}{a}\right)^n$ ou $F_{V_n}(a - \varepsilon) = 0$

Numéro

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MARCOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 08

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

on a donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n = 0$ (Suite géométrique de raison $\left|\frac{a-\varepsilon}{a}\right| < 1$)

ainsi, on a

$P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ou $P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = 0$

(et donc $V_n \xrightarrow{P} a$)

Ainsi, V_n est un estimateur convergent de a.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$P(n(a - V_n) \leq t) = P(a - V_n \leq \frac{t}{n})$

$= P(V_n - a \geq -\frac{t}{n})$

$= P(V_n \geq a - \frac{t}{n}) = 1 - P(V_n \leq a - \frac{t}{n})$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

Soit, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(n(a-V_n) \leq t) = 1 - F_{V_n}(a - \frac{t}{n})$

or,

$$F_{V_n}(a - \frac{t}{n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \frac{t}{n} \\ \left(\frac{a - \frac{t}{n}}{a}\right)^n & \text{si } \frac{t}{n} \leq a \leq a + \frac{t}{n} \\ 1 & \text{si } a > a + \frac{t}{n} \end{cases}$$

on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{V_n}(a - \frac{t}{n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a \geq 0 \end{cases} \quad \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{t}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a - \frac{t}{n}}{a}\right)^n = 1\right)$$

donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} P(n(a - V_n) \leq t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$

donc la suite $(n(a - V_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à a.

(J'ai ~~sûrement~~ peut-être ~~du~~ fait ~~faire~~ une erreur quelque part, je ne trouve pas ce résultat plausible)

6. /

7.

a) ~~x.t~~ $x^2 f_{V_n}(x)$ est continue sur $[0, a]$, donc V_n

admet un moment d'ordre 2, et on a :

$$E(V_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{V_n}(x)\,dx$$

$$= \int_0^a x^2 f_{V_n}(x)\,dx \qquad (f_{V_n} \text{ est nulle ailleurs})$$

$$= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^{n+1}\,dx = \frac{n}{a^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a$$

$$= \frac{n}{n+2} a^2$$

b) on a donc d'après la formule de König-Huyghens :

$$V(V_n) = E(V_n^2) - (E(V_n))^2$$

$$= \frac{n}{n+2} a^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a^2$$

et on a $b_a(V_n) = E(V_n) - a$

$$= \frac{n}{n+1} a - a = -\frac{1}{n+1} a$$

et donc, on a :

$$r_a(V_n) = V(V_n) + (b_a(V_n))^2$$

$$= \frac{n}{n+2} a^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} a^2 + \frac{1}{(n+1)^2} a^2$$

$$= \frac{a^2(n(n+1)^2 - n^2(n+2) + n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \pm$$

$$= \frac{a^2(n(n^2+2n+1) - n^3 - 2n^2 + n + 2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{a^2(\cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + n - \cancel{n^3} - \cancel{2n^2} + n + 2)}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{2a^2(n+1)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{2a^2}{(n+2)(n+1)}$$

on a donc bien $r_a(V_n) = \frac{2a^2}{(n+2)(n+1)}$

on a donc $\lim_{n \to +\infty} r_a(V_n) = 0$.

on retrouve donc le fait que V_n est un estimateur convergent (question 4).

Partie 2 :

8. on peut proposer le script suivant :

```
Fonction y = sim_M(n, a)
input('n')   input('a')
  X = ((n* grand(1, 1, unif, 0, a)) / n)
  M = 2X
disp(M)
```

9. comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,a]}$, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $E(X_k) = \frac{a}{2}$ et $V(X_k) = \frac{a^2}{12}$

d'où, on a :

$$E(\overline{X_n}) \underset{\uparrow}{=} \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{na}{2n} = \frac{a}{2}$$

par linéarité de l'espérance

Numéro

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MAKLOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 / 8

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page.

et on a ~~de~~ mis par mutuelle indépendance des variables aléatoires :

$$V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} n \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{12n}$$

on a donc :

$$E(M_n) \overset{\text{linéarité de l'espérance}}{=} 2E(\overline{X}_n) = 2\frac{a}{2} = a$$

donc M_n est un estimateur sans biais de a.

et on a : $r_a(M_n) = V(M_n) + (b_a(M_n))^2$

$$= V(M_n) = V(2\overline{X}_n)$$

$$= 4V(\overline{X}_n) = \frac{a^2}{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc, comme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r_a(M_n) = 0$, on en déduit que M_n est un estimateur convergent.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

11. on a donc $E(M_n) = a$ et $V(M_n) = \frac{a^2}{3n}$

~~donc, on a $E\left(\frac{M_n - a}{\sqrt{n}}\right) = 0$ et $V\left(\frac{M_n - a}{\sqrt{n}}\right) = n \frac{a^2}{3n} = \frac{a^2}{3n}$~~

~~et $V(M_n)$~~

donc, on a : $E(\sqrt{n}(M_n - a)) = 0$

et $V(\sqrt{n}(M_n - a)) = n V(M_n) = n \frac{a^2}{3n} = \frac{a^2}{3}$

et $V\left(\frac{\sqrt{3n}}{a}(M_n - a)\right) = 1$

on en déduit donc que la suite $\left(\frac{\sqrt{3n}}{a}(M_n - a)\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètre 0 et 1 (d'après le théorème central-limite)

et donc, on en déduit que la suite $(\sqrt{n}(M_n - a))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètre 0 et $\frac{a^2}{3}$.

---

12. /

13. on $r_a(M_n) = \frac{a^2}{3n}$ et $r_a(V_n) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$

et on a : $r_a(V_n) - r_a(M_n) = \dfrac{2a^2 3n - a^2(n+1)(n+2)}{3n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{6na^2 - a^2(n^2+3n+2)}{3n(n+1)(n+2)} = \frac{3na^2 - an^2 - 2a^2}{3n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{a^2(3n - n^2 - 2)}{3n(n+1)(n+2)} \leq 0 \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3n - n^2 - 2 \leq 0)$$

on a donc $\underline{r_a(V_n) \leq r_a(M_n)}$

et donc, V_n est un meilleur estimateur de a que ne l'est M_n.

on voit donc bien dans la première figure que les évolutions de $(V_1, \dots, V_{100})$ se rapproche plus de $a=1$ que celle de $(M_1, \dots, M_{100})$ ce qui confirme le fait que V_n est un meilleur estimateur de a que ne l'est M_n.

Partie 3 :

14.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]a, 2a]$, on a :

$$P(V_n \leq t) \overset{(\text{cl.2.6})}{=} \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t) = F_{X_1}(t)\left(F_{X_2}(t)\right)^{n-1}$$ (car les variables $X_2, \dots, X_n$ suivent tous la même loi)

or, $t > a$ donc, $\forall k \in [\![2, n]\!]$, on a : $F_{X_k}(t) = 1$

et comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,2a]}$ on en déduit que :

$\forall t \in [0, 2a]$, on a $F_{X_1}(t) = \frac{t}{2a}$

Ainsi, on a bien :

$\forall t \in]a, 2a]$, $\quad P(V_n \leq t) = \frac{t}{2a}$

b) $\forall t \in [0, a]$, on a :

$$P(V_n \leq t) = F_{X_1}(t) \left(F_{X_2}(t)\right)^{n-1} \quad \text{cd. c.b) et 14. a)}$$

$$= \frac{t}{2a} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^n$$

~~$\forall t \geq a$~~ $\forall t > 2a$, on a :

$$P(V_n \leq t) = F_{X_1}(t) \left(F_{X_2}(t)\right)^{n-1}$$

or, $X_1 \hookrightarrow U_{[0,2a]}$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow U_{[0,a]}$

donc, $\forall t > 2a$, $F_{X_1}(t) = 1$ et $F_{X_k}(t) = 1$

Ainsi $P(V_n \leq t) = 1$

si $t < 0$, on a $P(V_n \leq t) = 0$ car $X_1 \hookrightarrow U_{[0,2a]}$ et $X_2, \dots, X_n \hookrightarrow U_{[0,a]}$

Ainsi,

$\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{V_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \frac{t}{2a} & \text{si } a < t \leq 2a \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

Numéro

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MARKOUF

19.6 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques - Voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 7 / 8

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page.

on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n = 0$ (si $r < a$ (suite géométrique de raison $\left|\frac{r}{a}\right| < 1$)

et si $r = a$, on a $\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^n = \frac{1}{2} = \frac{a}{2a}$

Ainsi, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{V_n}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{r}{2a} & \text{si } a \leq r \leq 2a \\ 1 & \text{si } r > 2a \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de X_1, on peut donc déduire que la suite de variables aléatoires V_n converge vers une loi suivant la loi Uniforme ~~de paramètre~~ sur $[a, 2a]$.

d) on a : $P(V_n > \frac{3}{2}a) = 1 - P(V_n \leq \frac{3}{2}a)$

or, $\frac{3}{2}a \in]a, 2a]$ donc d'après 7b), on a :

$$P(V_n \leq \frac{3}{2}a) = \frac{\frac{3}{2}a}{2a} = \frac{3}{4}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

on a donc :

$$\underline{\Pr\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) = \frac{1}{4}}$$

15.

a) $\forall\ n \geq 2$, on a : $M_n = \frac{2}{n}(X_1 + \_ + X_n)$

$$= \frac{2}{n}X_1 + \frac{2}{n}(X_2 + \_ + X_n)$$

$\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2}{n-1} = 1\right.$
opération blanche$\left.\right)$

$$= \frac{2}{n}X_1 + \frac{2(n-1)}{n\,2} \cdot \frac{2}{n-1}(X_2 + \_ + X_n)$$

$$= \underline{\frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M_n'}$$

b) $\forall\ n \geq 2$, on a :

$$|M_n - a| = \left|\frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M_n' - a\right|$$

inégalité triangulaire (X_1 est positive

$$\leq \frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}|M_n' - a|$$

or, $X_1 \leq \frac{3}{2}a$ (Th. 4) et $\frac{n-1}{n} \leq 1$

donc, on a :

$$\underline{|M_n - a| \leq \frac{2}{n}\frac{3}{2}a + |M_n' - a| = \frac{3a}{n} + |M_n' - a|}$$

c) on a donc : $\frac{3a}{n_0} < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0, n_0 \geq 2)$

~~$[|M_n - a| < \frac{3a}{n} < 2\varepsilon]$~~

on a : $\underline{[|M_n' - a| < \varepsilon] \subset [|M_n - a| < 2\varepsilon]}$

(Je n'arrive pas très bien à expliquer cette inclusion, veuillez m'excuser)

Et on a donc par croissance de la probabilité :
Soit $\varepsilon > 0$

$P([|M_n' - a| < \varepsilon]) \leq P([|M_n - a| < 2\varepsilon])$

et donc, $0 \leq P([|M_n - a| \geq 2\varepsilon]) \leq P([|M_n' - a| \geq \varepsilon])$

or, la suite de variables aléatoires $(M_n')_{n \geq 2}$ converge en probabilité vers a.

on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P([|M_n' - a| > \varepsilon]) = 0$

et donc, par le théorème d'encadrement, on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} P([|M_n - a| \geq 2\varepsilon]) = 0$ (avec $2\varepsilon > 0$)

Ainsi, on peut conclure que :

La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.

16. Désormais, c'est l'estimateur (M_n) qui converghait plus vite vers a et non plus l'estimateur (V_n) comme précédemment.
Ainsi, les estimateurs ~~seraient~~ seraient sensibles à une perturbation.

Exercice 2 :

1. $(x, y) \mapsto x^2 + y$ est de classe C^2 ~~comp~~ sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale
$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale
$t \mapsto e^{-t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle l'est.

Ainsi, l est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et composés de fonctions qui le sont,
et on a :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$\partial_1 l(x, y) = 2x e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y) e^{-(x^2+y^2)}$

et $\partial_2 l(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y) e^{-(x^2+y^2)}$

2. Cherchons les points où le gradient s'annule :

Numéro

Nom BENHAMOU

Prénom (s) NATHAN MAKOUF

19.6 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques - Voie S

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 8 / 8

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

$$\begin{cases} 2x\, e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x\, e^{-(x^2+y^2)} = 2x(x^2+y)\, e^{-(x^2+y^2)} \\ e^{-(x^2+y^2)} = 2y(x^2+y)\, e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x(x^2+y) \\ 2y(x^2+y) = 1 \end{cases} \quad (\text{car } e^{-(x^2+y^2)} \neq 0)$$

La première équation donne $x=0$ ou $x^2+y=1$.

Si $x=0$, on a donc :

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

donc $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sont points critiques de f.

Si $x^2 + y = 1$, on a :

$$\begin{cases} \cancel{2x = 2x} \; 2x = 2x(x^2+y) \\ 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x(x^2+y) \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +x^2 = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{car } x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

~~or, si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ la marche pas~~

Donc $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ sont point critiques de f (pas sûr pour le dernier, je ne suis peut-être trompé)

3. on a donc :

$$\partial^2_{11} f(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2\left(\left(1 - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)(1-0) - 0\right) e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2 - \sqrt{2})\, e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\partial^2_{22} f(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -2\left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) e^{-1/2}$$

$$= \left(-2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 0\right) e^{-1/2} = -2\sqrt{2}\, e^{-1/2}$$

et comme f est de classe C^2, on a d'après le théorème de Schwarz.

$$\partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial^2_{2,1} f(x, y)$$

$$= 0$$

donc la hessienne de f en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est :

$$\nabla f(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ qui est bien diagonale.

comme elle est diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ici $e^{-1/2}(2-\sqrt{2})$ et $(-2\sqrt{2})\, e^{-1/2}$ sont ses valeurs propres, or, on $2-\sqrt{2} > 0$ et $-2\sqrt{2} < 0$ $(e^{-1/2} > 0)$

on en déduit que les valeurs propres de la hessienne ne sont pas strictement positive ou strictement négative et donc, d'après le cours, on peut dire que la fonction f n'admet pas d'extremum local en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. d'après Schwarz, on a :

$$\partial^2_{12} \ell(x,y) = \partial^2_{21} \ell(x,y) = 0$$

et on a :

$$\partial^2_{11} \ell(x,y) = 2\left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) e^{-1/2}$$

$$= (2+\sqrt{2})\, e^{-1/2}$$

et $\partial^2_{22} \ell(x,y) = -2\left(-\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) e^{-1/2}$

$$= 2\sqrt{2} + \left(1+\sqrt{2}\,(1-\sqrt{2})\right) e^{-1/2}$$

$$= (2\sqrt{2})\, e^{-1/2}$$

donc on a :

$$\nabla \ell\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Sp}\left(\nabla \ell\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left\{ e^{-1/2}(2+\sqrt{2}),\ e^{-1/2}2\sqrt{2} \right\}$

(car matrice diagonale) et comme $e^{-1/2}(2+\sqrt{2}) > 0$ et $e^{-1/2}2\sqrt{2} > 0$, on en déduit d'après le cours que f admet un minimum local au point $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$