# Les questions classiques #3 : Les applications linéaires

## SUJET EDHEC E 2018

### Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $A$ n'est pas inversible.

2) Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application $f$ qui, à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

3) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de $E_1$, $E_2$, $E_3$ et $E_4$, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5) a) Déterminer l'image par $f$ des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Donner les valeurs propres de $f$ puis conclure que $f$ est diagonalisable.

6) Généralisation : $f$ est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, $A$ est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que $f$ et $A$ possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur colonne propre associé.
Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de $f$. En déduire que $\lambda$ est valeur propre de $f$.

b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de $f$ associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes $C_1$ et $C_2$ de $M$, montrer que $\lambda$ est valeur propre de $A$.