



GB-00035
452303
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) Soit : $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall k \in \mathbb{I}0; n-1\mathbb{I}$, $a_k \leq a_n$, car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Donc par somme : $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_n = na_n$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq a_n$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{1}{n+1} (nb_n + a_n) - b_n \\ &= \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) b_n + \frac{1}{n+1} a_n \\ &= \frac{1}{n+1} (a_n - b_n) \end{aligned}$$

Comme : $a_n \geq b_n$, alors : $b_{n+1} - b_n \geq 0$, donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers l , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq l$$

Ainsi d'après 1a) : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq l$

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (donc monotone) et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite l'

D'après 1)a): $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq a_n$, donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

$$\Rightarrow l' \leq l$$

c) soit: $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $b_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \right)$

Or: $\forall k \in \llbracket n; 2n-1 \rrbracket$, $a_k \geq a_n$, donc par somme: $\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq n a_n$

$$\text{Donc: } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n} \geq \frac{1}{2n} (n b_n + n a_n) = \frac{a_n + b_n}{2}$$

d) Par somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{l + l'}{2}$, or: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n} \geq \frac{a_n + b_n}{2}$

Comme $(b_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers l' , alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n} = l'$

Ainsi, on a: $l' \geq \frac{l + l'}{2} \Leftrightarrow \frac{l'}{2} \geq \frac{l}{2} \stackrel{2 \times 0}{\Leftrightarrow} l' \geq l$

D'après 2)b): $l' \leq l$, donc par double-égalité: $l' = l$, ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

2)a) Par récurrence sur: $n \in \mathbb{N}$, montrons que: $u_n \geq 1$, où u_n est définie

Initialisation: $u_0 = 1$, la propriété est donc vraie au rang $n=0$.

Hérédité: pour un certain: $n \geq 0$, supposons que $u_n \geq 1$, montrons alors que: $u_{n+1} \geq 1$. Par hypothèse de récurrence: $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$

Avec: $u_n^2 \geq 1$, $u_n \geq 1$, on a: $u_n^2 + u_n \geq 2$, donc par définition et croissance de: $u \mapsto \sqrt{u}$, sur \mathbb{R}_+ , on a: $u_{n+1} \geq \sqrt{2} \approx 1,414 > 1$, la propriété est donc héréditaire, car u_{n+1} est alors défini.

Conclusion: la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

b) Comme: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$, étudions la fonction:
 $f: x \mapsto \sqrt{x^2+x} - x$, avec:

$x \mapsto x^2+x$, et: $x \mapsto -x$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; +\infty[$, car polynomiales.
 Comme $x \mapsto x^2+x$ est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* sur $[1; +\infty[$ et que i. a. d. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$,
 alors par composition et somme: $f \in \mathcal{C}^1([1; +\infty[)$, et:

$$\forall x \geq 1, f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1 - 2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)^2 - 2(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x}(2x+2\sqrt{x^2+x}+1)} = \frac{4x^2+4x+1-2x^2-2x}{2\sqrt{x^2+x}(2x+2\sqrt{x^2+x}+1)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}(2x+2\sqrt{x^2+x}+1)}$$

$$\text{Or: } \forall x \geq 1, \begin{cases} 2x^2+2x+1 \geq 2+2+1=5 > 0 \\ 2\sqrt{x^2+x}(2x+2\sqrt{x^2+x}+1) > 0 \end{cases}$$

Donc par quotient: $\forall x \geq 1, f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$, donc: $\forall x \geq 1, f(x) \geq f(1) = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414 > 0$

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, (u_n) est donc strictement croissante.

Comme: $\forall x \geq 1, f(x) > 0$, alors: $\nexists x_0 \in [1; +\infty[$, $f(x_0) = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet donc aucun point fixe (limite potentielle) sur $[1; +\infty[$, par conséquent, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

c) $n=1; u=1; S=1;$

while $S \leq 1000$

$u = \text{sqrt}(u^2 + u); \quad \parallel \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \quad u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + u_{n-1}}$

$S = S + u; \quad \parallel \quad S_{n+1} = S_n + u_n$

$n = n + 1;$

end

disp(n);

3) a) On a :

$$\forall x \geq 1, f(x) = \sqrt{x^2+x} - x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

comme : $x \geq 1$: $\frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 2$ et donc par chape : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$, par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$$

b) D'après 2)b), f est strictement croissante sur $]\epsilon, +\infty[$

Avec : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n = u_{n+2} + u_n \geq 1 > 0$

Alors $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

c) $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$, ainsi, d'après la première question :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$$

Ainsi : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$

Pour par télescopage : $\frac{u_n - u_0}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$

Pour par transitivité de la relation d'équivalence : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

4) a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = u_n$

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, n \geq 0$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :1) a) Par positivité de exp : $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ Donc : $\forall x \leq 0, F_Y(x) = 0$ Et, $\forall x > 0, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^Z \leq x) = P(Z \leq \ln(x))$, par croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* , ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) $\ln \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (par propriété) donc par composition : $F_Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, sauf éventuellement en 0, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ (éventuellement } x \neq 0), F_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \Phi'(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right) \end{cases}$$

2) a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, comme $X_n(\Omega)$ est fini, X_n admet une espérance et : $E(X_n) = -P(X_n = -1) + P(X_n = 1) = -(1-p) + p$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, E(X_n) = 2p - 1$$

b) Soit: $\omega \in \{-1; 1\} = X_k(\Omega)$, pour: $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Alors: $T_n(\omega) = \prod_{k=1}^n X_k(\omega) \in \{(-1)^n; 1\}$, donc: $T_n(\Omega) = \{-1; 1\}$

Ainsi: $T_{2n}(\Omega) = \{1\}$, $T_{2n+1}(\Omega) = \{-1; 1\}$

Par indépendance mutuelle des $(X_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, T_n admet une espérance ~~car les $(X_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont bornés~~ car $T_n(\Omega)$ est fini et:

$$E(T_n) = E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k) = \prod_{k=1}^n (2p-1) = (2p-1)^n$$

Ainsi: $-P(T_n = -1) + P(T_n = 1) = (2p-1)^n$

$$\Leftrightarrow P(T_n = 1) = (2p-1)^n + P(T_n = -1)$$

c) On a: $P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1$, car: $T_n(\Omega) = \{-1; 1\}$

$$\text{Ainsi: } \begin{cases} P(T_n = 1) = 1 - P(T_n = -1) & L_1 \\ P(T_n = 1) = (2p-1)^n + P(T_n = -1) & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2P(T_n = 1) = (2p-1)^n + 1 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2P(T_n = -1) + (2p-1)^n - 1 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(T_n = 1) = \frac{1}{2} ((2p-1)^n + 1) \\ P(T_n = -1) = \frac{1}{2} (1 - (2p-1)^n) \end{cases}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = -1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (1 - (2p-1)^n) =$$

D'après le lemme de Bernoulli: $\forall p \in]0, 1[, 2p-1 \in]-1, 1[$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2p-1)^n = 0$$

Donc par somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = -1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (1 + (2p-1)^n) = \frac{1}{2}$$

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi vers une variable T suivant la loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$.

$$3) a) \text{ On a: } [|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}] \subset [|T_{n+1} - T'| + |T_n - T'| < 1]$$

Or d'après l'inégalité triangulaire: $|T_{n+1} - T'| + |T' - T_n| \geq |T_{n+1} - T_n|$

$$\Leftrightarrow |T_{n+1} - T'| + |T_n - T'| \geq |T_{n+1} - T_n|$$

Donc: $[|T_{n+1} - T'| + |T_n - T'| < 1] \subset [|T_{n+1} - T_n| < 1]$

Finalament: $[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}] \subset [|T_{n+1} - T_n| < 1]$

$$b) \text{ D'après 3) a): } P([|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}]) \leq P(|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P([|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}]) \geq 1 - P(|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}]}) \geq P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1)$$

Donc d'après la loi de De Morgan: $P([|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}] \cup [|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}]) \geq P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1)$

D'après la formule du théorème de Poincaré à l'ordre 2:

$$P([|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}] \cup [|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}]) - \underbrace{P([|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}])}_{\in [0, 1]} \geq P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1)$$

Ainsi:

$$P(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}) + P(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}) \geq P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1)$$

e) On a : $T_n(\Omega) = \{-1; 1\}$

Pour : $(T_{n+1} - T_n)(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) &= P(T_{n+1} - T_n = -2) + P(T_{n+1} - T_n = 2) \\ &= P(T_n = 1 \cap T_{n+1} = -1) + P(T_n = -1 \cap T_{n+1} = 1) \\ &= P(X_{n+1} = -1)P(T_n = -1) + P(X_{n+1} = 1)P(T_n = 1), \end{aligned}$$

d'après la formule des probabilités composées -

~~$\Leftrightarrow P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = \frac{1}{2}p(1 - (2p-1)^n) + \frac{1}{2}p(1 + (2p-1)^n)$~~

$\Leftrightarrow P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = \frac{1}{2}(1-p)(1 - (2p-1)^n) + \frac{1}{2}(1-p)(1 + (2p-1)^n)$

$\Leftrightarrow P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1-p$

d) Supposons que : $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} T'$, où T' est une variable aléatoire réelle quelconque. Alors :

$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - T'| \geq \epsilon) = 0$

Or d'après 3)b) : $0 \leq P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}) + P(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2})$

Pour : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}) + P(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}) = 0$

Pour par encadrement : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 0$

Or d'après 3)c) : $P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1-p \in]0; 1[$, ce qui est ABSURDE.

Conclusion : $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas en probabilité.

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) a) \bar{X}_n^* est fonction affine de \bar{X}_n donc: $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, tel que:

$$\bar{X}_n^* = a\bar{X}_n + b$$

Par linéarité de l'espérance et propriété de la variance:

$$\begin{cases} V(\bar{X}_n^*) = a^2 V(\bar{X}_n) = 1 \\ E(\bar{X}_n^*) = a E(\bar{X}_n) + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} > 0 \\ b = -a E(\bar{X}_n) = -\frac{E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \end{cases}$$

Avec par linéarité de l'espérance et propriété de la variance (les variables $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes):

$$\begin{cases} E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{n(2p-1)}{n} = 2p-1 = 0 \\ V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{V(X_n)}{n} \end{cases}$$

D'après la formule de Bernoulli - Huygens: $V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$
D'après le théorème de transfert:

$$\begin{aligned} V(X_n) &= (-1)^2 P(X_n = -1) + P(X_n = 1) + (2p-1)^2 = 1 \cdot p + p + (2p-1)^2 \\ \Leftrightarrow V(X_n) &= (2p-1)^2 + 1 = 4p^2 - 4p + 2 = \frac{4}{n} - 2 + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement: } \bar{X}_n \stackrel{Y}{=} \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_{p+1})}{\sqrt{4p^2 - 4p + 2}} \stackrel{Y}{=} \frac{\sqrt{n}\bar{X}_n}{\sqrt{1}} = \sqrt{n}\bar{X}_n, \text{ pour } p = \frac{1}{2}$$

b) D'après le théorème Central-Limit,

$$\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} Z \text{ co } \mathcal{N}(0; 1)$$

Tout par composition:

$$\exp(\sqrt{n}\bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} e^Z, \text{ où } e^Z \text{ suit la même loi que } Y.$$

$$\text{Or: } \exp(\sqrt{n}\bar{X}_n) = \exp\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\bar{X}_n\right) = \left(\exp(n\bar{X}_n)\right)^{1/\sqrt{n}} = U_n^{1/\sqrt{n}}$$

Conclusion: $(U_n^{1/\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle de même loi que Y .

Exercice 33

1) \langle, \rangle est symétrique donc: $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle$

Comme f est antisymétrique: $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = -\langle f(x), x \rangle$

$$\Leftrightarrow 2\langle f(x), x \rangle = 0$$

Tout: $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$

2) Soit: $y \in E$. Par propriété: $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \emptyset$.
 $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ Également, donc:
 - $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0\}$
 - $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset E$

Soit: $y \in \text{Ker}(f) \wedge \exists m(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in \text{Ker}(f) \\ y \in \mathcal{D}_m(f) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y) = 0 \\ \exists x \in E, y = f(x) \end{array} \right.$

Soit: $(x, y) \in \text{Ker}(f) \times \mathcal{D}_m(f)$, on a: $y = f(x_1)$, $x_1 \in E$, et:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(x_1) \rangle = -\langle f(x), x_1 \rangle = -\langle 0_E, x_1 \rangle = 0$$

Ponc: $\text{Ker}(f) = (\mathcal{D}_m(f))^\perp$ *avec*

Alors: $\text{Ker}(f) \oplus \mathcal{D}_m(f) = E$

g) Soit: $(x, y) \in E^2$, ~~on a~~ comme f est anti-symétrique, on a:

$$\langle s(x), y \rangle = \langle (f \circ f)(x), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle = -(-\langle x, s(y) \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle, \text{ donc } s \text{ est symétrique}$$

Soit: $\lambda \in \mathcal{S}_p(1)$, et: $x \neq 0_E$, tel que: $x \in E_\lambda(\lambda)$

Alors: $\|f(x)\|^2 \geq 0$, car \langle, \rangle est définie positive.

$$\Leftrightarrow \langle f(x), f(x) \rangle = -\langle s(x), x \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle s(x), x \rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \|x\|^2 \leq 0 \text{ (comme: } x \neq 0_E, \|x\|^2 > 0)$$

Ponc: $\lambda \leq 0$, donc: $\mathcal{S}_p(1) \subset \mathbb{R}_-$

h) a) $\forall x \in \mathcal{D}_m(f)$, $g(x) = f(x) \in \mathcal{D}_m(f)$, donc $\mathcal{D}_m(f)$ est stable par g

\circ f est linéaire donc g est linéaire, donc: $g \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_m(f))$

\circ Comme f est anti-symétrique: $\forall (x, y) \in (\mathcal{D}_m(f))^2, \langle g(x), y \rangle = \langle f(x), y \rangle = -\langle x, g(y) \rangle$

Ponc g est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{D}_m(f)$

b) ~~$g \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_m(f))$, donc d'après~~

g est un endomorphisme antisymétrique de $\mathcal{I}_m(f)$, donc d'après 3),
 t est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{I}_m(f)$ (il suffit de
transposer l'analyse à $E = \mathcal{I}_m(f)$). De là:

$$\mathcal{P}_p(H) \subset \mathbb{R}_-$$

~~Comme: $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}_m(f)}$, alors: $\forall x \in \mathcal{I}_m(f), f(x) \neq 0_E$ ($x \notin \text{Ker}(f)$)~~

Comme: $g = f_{|\mathcal{I}_m(f)}$, et que: $\text{Ker}(f) \oplus \mathcal{I}_m(f) = E$

Alors: $\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_m(f) = \{0_E\}$, donc: $f|_{\mathcal{I}_m(f)} = 0_E$

$\Rightarrow g(g(x)) = 0_E$, alors: $g(x) \in \mathcal{I}_m(f) \cap \text{Ker}(f)$, donc:

$$g(x) = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E, \text{ donc: } \text{Ker}(g) = \{0_E\}$$

Ainsi: $0 \notin \mathcal{P}_p(H)$, donc: $\mathcal{P}_p(H) \subset \mathbb{R}_+^*$.

S) a) On a: $\langle e_n, g(e_n) \rangle = 0$, d'après 1), où: $f(e_n) = \lambda e_n$

$$\Leftrightarrow g(g(e_n)) = \lambda e_n \neq 0_E, \text{ donc } g(e_n) \neq 0_E$$

Donc $(e_n, g(e_n))$ est une famille orthogonale d'éléments non-nuls
de $E_\lambda(H)$ ($f(g(e_n)) = (g \circ g)(g(e_n)) = g(\lambda e_n) = \lambda g(e_n)$, où $g(e_n) \neq 0_E$),
par conséquent:

$(e_n, g(e_n))$ est une famille orthogonale libre de $E_\lambda(H)$

b)

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$6) a) \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \|g(e_k)\|^2 = \langle g(e_k), g(e_k) \rangle = -\langle t(e_k), e_k \rangle$$

$$\Leftrightarrow \|g(e_k)\|^2 = -\lambda \|e_k\|^2 \text{ (linéarité à gauche de } \langle, \rangle \text{)}$$

b) $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$g(e_k') = g\left(\frac{1}{\|e_k\|} e_k\right) = \frac{1}{\|e_k\|} g(e_k), \text{ or: } \|g(e_k)\| = \sqrt{-\lambda} \|e_k\|$$

$$\text{Donc: } g(e_k') = \frac{\sqrt{-\lambda}}{\|g(e_k)\|} g(e_k) = \sqrt{-\lambda} g\left(\frac{1}{\|g(e_k)\|} e_k\right) = \sqrt{-\lambda} e_k''$$

$$\Leftrightarrow g(e_k') = \sqrt{-\lambda} e_k''$$

$$\text{Et: } g(e_k'') = g\left(\frac{g(e_k')}{\sqrt{-\lambda}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} t(e_k') = \frac{\lambda}{\sqrt{-\lambda}} e_k' = -\sqrt{-\lambda} e_k'$$

≥ 0 (d'après 5)b)

7) a) t est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}(F)$ à valeurs propres dans \mathbb{R}^* , donc t est diagonalisable, ainsi :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(t)} E_\lambda(t) = \mathcal{M}(F), \text{ donc:}$$

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(t)} E_\lambda(t)\right) = \text{rg}(F) \Rightarrow \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(t)} \dim E_\lambda(t) = \text{rg}(F)$$

Or d'après 5)b) : $\forall \lambda \in \mathcal{P}(t), \dim(E_\lambda(t)) \in 2\mathbb{N}$

En posant : $\# \mathcal{G}_p(H) = m \in \llbracket 1, \text{rg}(F) \rrbracket$, et : $\mathcal{G}_p(H) = \{x_i, i \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$

Alors : $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \dim(E_{x_i}(H)) = 2p_i, p_i \in \mathbb{N}$

$$\text{Et : } \text{rg}(F) = 2 \sum_{i=1}^m p_i \in 2\mathbb{N} \quad (\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m p_i = \frac{\text{rg}(F)}{2})$$

Le rang de F est donc pair.

~~b) En reprenant les notations de 7(a), par concaténation,
($e_{11}, \dots, e_{1p_1}; e_{21}, \dots, e_{2p_2}; \dots$)~~

b) $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, (e_{i1}, \dots, e_{ip_i})$ est une base orthogonale de $E_i(H)$ (de façon à ce que : $\sum_{i=1}^m p_i = r$)

Ponc par concaténation : $((e_{i1}, \dots, e_{ip_i})_{1 \leq i \leq m})$ est une base orthogonale de $\text{Im}(F)$

En posant (x_{r+1}, \dots, x_n) une base orthonormale de $\text{Ker}(F)$

D'après 2), par concaténation :

$((e_{i1}, \dots, e_{ip_i})_{1 \leq i \leq r}, (x_{r+1}, \dots, x_n))$ est une base orthogonale

de E et par orthonormalisation :

$\beta = ((\frac{1}{\|e_{i1}\|} e_{i1}, \dots, \frac{1}{\|e_{ip_i}\|} e_{ip_i})_{1 \leq i \leq r}, (x_{r+1}, \dots, x_n))$ est une base orthonormale de E

D'après 6) b) : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, F_{\text{Im}(F)}(e_j) = \sqrt{\lambda} \times \frac{1}{\|g(e_j)\|} g(e_j)$

Sous ces conditions, on a bien: $\exists (a_i)_{1 \leq i \leq r} \in (\mathbb{R}^*)^r$, tel que,

$$\text{Mat}_p(f) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -a_r & \\ & & & a_r & 0 \end{bmatrix} \in \text{Ed}_n(\mathbb{R})$$

ou: $\text{Mat}_p(f) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -a_r & \\ & & & a_r & 0 \end{bmatrix}$, si f est un automorphisme de E .

Problème:

Partie 1:

1) $\forall (p, q) \in \mathbb{N}$

On a: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $x \mapsto x^p(1-x)^q \in \mathcal{C}([0, 1])$ car polynôme

Par conséquent: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q)$ est une intégrale convergente, nous ne reviendrons pas dessus dans le problème.

$$1) \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \begin{aligned} I(p, 0) &= \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \\ I(0, q) &= \int_0^1 (1-x)^q dx = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

2) $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a:

$$I(p+1, q-1) = \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^1 (x-1+1) \dots$$

$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$, donc par intégration par parties (IPP) sur le segment $[0, 1]$, on a:

$$I(p, q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \times -q (1-x)^{q-1} dx$$

$$\text{Or: } \left[\frac{x^{p+1} (1-x)^q}{p+1} \right]' = 0$$

$$\text{Donc: } \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+, I(p, q) = \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

$$3) \text{ Initialisation: } \forall p \in \mathbb{N}, \frac{p! \cdot 0!}{(p+0)!} I(p+0, 0) = I(p, 0), \text{ donc } H_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité: Par un certain: $q \geq 0$, supposons H_q , i.e.

$$\forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p! \cdot q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$$

Montrons alors que H_{q+1} est vrai, i.e.: $\forall p \in \mathbb{N}, I(p, q+1) = \frac{p! \cdot (q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$

$$\text{D'après 2): } I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) = \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)! \cdot q!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$$

$$\Leftrightarrow I(p, q+1) = \frac{p! \cdot (q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0), \text{ donc: } H_q \Rightarrow H_{q+1}$$

Conclusion: H_0 est vraie et: $\forall p \in \mathbb{N}, H_q \Rightarrow H_{q+1}$, donc: $\forall p \in \mathbb{N}, H_q$ est vraie.

$$4) \text{ D'après 1): } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p+q, 0) = \frac{1}{p+q+1}$$

$$\text{Et d'après 3): } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = \frac{p! \cdot q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$$

$$\text{Par conséquent: } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = \frac{p! \cdot q!}{(p+q)!}, \text{ ainsi:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Partie 2:

Soit: $n \in \mathbb{N}$

Si a sur $[0, 1]$, b_n est polynômiale donc continue, ainsi sur $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, b_n est nulle donc continue, ainsi b_n est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 1, soit un nombre fini de points.

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\bullet \forall x \in [0; 1], \quad (1-x) \in [0; 1]$$

$$\text{Pare : } \forall n \in \mathbb{N} \quad x^n (1-x)^n \in [0; 1], \text{ avec : } |a_{n+1}| = \frac{(n!)^2}{(n+1)!} > 0$$

$$\text{Alors : } \forall x \in [0; 1], \quad b_n(x) \geq 0, \text{ ainsi : } b_n \geq 0$$

• Sous réserve de convergence, par relation de Charles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_{=0} + \int_0^1 \frac{1}{(n!)^2} x^n (1-x)^n dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0 dx}_{=0}$$

(d'après le théorème d'annulation)

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx = \frac{1(n!, n)}{1(n!, n)} = 1$$

Conclusion : b_n est une densité de probabilité.

6)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad b_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [0; 1] \\ 1, & \text{si } x \in [0; 1] \end{cases}$$

Ponc : $X_0 \text{ (s)} \mathcal{U}([0; 1])$

7) a) Sous réserve de convergence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E(X_n) = \int_{x_n(x)} x b_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1} (1-x)^n dx = \frac{1(n+1, n)}{1(n!, n)}$$

X_n admet donc une espérance et d'après 3) :

$$E(X_n) = \frac{I(n+1, n)}{I(n, n)} = \frac{\frac{(n+1)! n!}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

b) Sans vérification de convergence, d'après le théorème de transfert: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E(X_n^2) = \int_{x_n(a)} x^2 b_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{I(n, n)} x^{n+2} (1-x)^n dx = \frac{I(n+2, n)}{I(n, n)}$$

X_n admet donc un moment d'ordre 2 (donc une variance) et :

$$E(X_n^2) = \frac{(n+2)! n!}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow E(X_n^2) = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

Puis d'après la formule de Bienaymé-Tchebychev :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2n+4 - 2n-3}{4(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow V(X_n) = \frac{1}{4(2n+3)}$$

c) ~~D'après la loi faible des grands nombres~~

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow P\left(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$$

Or: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\epsilon^2(2n+3)} = 0$, donc:

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon) = 0$$

$$\text{Ainsi: } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \left(\frac{1}{2} \right)$$

Partie 3:

8)

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si: } x < 0 \\ x, & \text{si: } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{si: } x > 1 \end{cases}$$

9) a) V_{2n+1} correspond à l'instant d'arrivée de la $2n+1$ -ième personne arrivée au rendez-vous, V_{2n+1} correspond à l'instant d'arrivée le plus tardif, par conséquent:

$$V_{2n+1} = \max_{1 \leq i \leq 2n+1} (U_i)$$

b) On a: $\forall_{2n+1} V_{2n+1}(\Omega) = \max_{1 \leq i \leq 2n+1} (U_i)(\Omega) = U(\Omega) = [0, 1]$

Avec:

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_{2n+1}(x) = P(V_{2n+1} \leq x) = P(\max_{1 \leq i \leq 2n+1} (U_i) \leq x) = P(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i \leq x])$$

Par indépendance mutuelle des $(U_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$, on a:

$$G_{2n+1}(x) = \prod_{i=1}^{2n+1} P(0 \leq U_i \leq x) = \prod_{i=1}^{2n+1} F_0(x) = (F_0(x))^{2n+1}$$

$$\text{Ainsi: } \forall x \in \mathbb{R}, G_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si: } x < 0 \\ x^{2n+1}, & \text{si: } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{si: } x > 1 \end{cases}$$

10) a) V_1 correspond à l'instant d'arrivée de la première personne au rendez-vous. Par conséquent, V_1 correspond à l'instant d'arrivée

le plus tôt, ainsi:

$$V_n = \inf_{1 \leq i \leq 2n+1} (U_i)$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, P(V_n > x) = P(\inf_{1 \leq i \leq 2n+1} (U_i) > x) = P(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i > x])$

Puis par indépendance mutuelle des $(U_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(V_n > x) = \prod_{i=1}^{2n+1} P(U_i > x) = \prod_{i=1}^{2n+1} (1 - F_U(x)) = (1 - F_U(x))^{2n+1}$$

Puis: $P(V_n > x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^{2n+1}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dès lors: $\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = P(V_n \leq x) = 1 - P(V_n > x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{2n+1}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- 11) $n = \text{input}()$ (entrez une valeur pour n);
 $U = \text{grand}(1, 2 * n + 1, 'uin', 0, 1)$;
 $V1 = \text{imin}(U)$;
 $V2n+1 = \text{max}(U)$;
 $\text{disp}([V1, V2n+1])$;

12) a) Soit: $x \in [0, 1]$, on a:

$$\begin{aligned}
 [V_{n+1} \leq x] &= \left[\bigcap_{k=1}^{n+1} [V_k \leq x] \right] \cap \left[\bigcap_{k=n+2}^{2n+1} [V_k > x] \right] \\
 &= \left[\bigcap_{k=1}^{n+1} [V_k \leq x] \cap [V_{2n+1-k} > x] \right] \\
 &= \left[\bigcap_{k=1}^{n+1} [V_k \leq x] \cap [V_{2n+1-k} > x] \right] \\
 [V_{n+1} \leq x] &= \left[\bigcap_{1 \leq k \leq n+1} (V_k \in [0, x]) \right] \cap \left[\bigcap_{n+2 \leq k \leq 2n+1} (V_k \in [x, 1]) \right] \\
 &= \bigcup_{1 \leq k \leq n+1} \left[\text{combinaisons des } (V_k)_{1 \leq k \leq n+1} \in [0, x]^n \right] \cap \left[\bigcap_{n+2 \leq k \leq 2n+1} (V_k \in [x, 1]) \right] \\
 &= \bigcup_{1 \leq k \leq n+1} \left[\text{combinaisons des } (V_{2n+1-k}) \in [0, x]^n \right] \cap \left[\text{combinaisons des } (V_k)_{n+2 \leq k \leq 2n+1} \in [x, 1]^n \right]
 \end{aligned}$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De là, par champ de binarité

$$\forall x \in [0, 1], G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} P(\underbrace{k \text{ personnes arrivées entre } 0 \text{ et } x}_{\# \text{ combinaisons}}) \times P(2n+1-k \text{ personnes arrivées après } x)$$

Pense par indépendance mutuelle des $(U_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$, on a finalement :

$$\forall x \in [0, 1], G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

b) Par propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ (éventuellement : $x \notin [0, 1]$) :

$$g_{n+1}(x) = G_{n+1}'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [0, 1] \\ \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} - x^k (2n+1-k)(1-x)^{2n-k}) & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1], g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} x^k (1-x)^{2n-k}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1], g_{n+1}(x) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} x^k (1-x)^{2n-k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} x^k (1-x)^{2n-k} = 0, \text{ si } k=2n+1$$

Pense par télescopage :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [0, 1] \\ \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n, & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} = b_n(x)$$

Ainsi V_{n+1} suit la même loi que X_n .

c) Ce script renvoie la médiane de la série statistique

$[8, 2, 9, 13, 23, 1, 5]$

ordonnée par ordre croissant, on a :

$[1, 2, 5, 8, 9, 13, 23]$, la médiane de cette série est 8

Le script renvoie donc la valeur 8 (la valeur de la série impaire est 8, la valeur de la suite intérieure son égale)

d) $n = \text{input}('entrez une valeur pour n : ');$

$U = \text{grand}(1, 2^{*}n+1, 'un', 0, 1);$

~~$X = \text{median}(U) \quad // \quad \cancel{V_{n+1}}$~~

$n = \text{input}('entrez une valeur pour n : ');$

$U = \text{grand}(1, 2^{*}n+1, 'un', 0, 1);$

$X = \text{median}(U)$ // car X_n et V_{n+1} suivent la même loi et que
 $\text{diop}(X)$ // V_{n+1} correspond à la médiane de la série
 $(V_k)_{1 \leq k \leq 2n+1}$