ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted] / [redacted] / [redacted]

Nom [redacted]

Prénom (s) [redacted]

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 10

Numéro de table 35

Exercice 1

Partie I

1) $F = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M = a I_3 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Donc $F$ est un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont non-colinéaires donc $(I_3, B)$ est libre, de plus comme Vect de $F$ elle génère $F$.
Donc $(I_3, B)$ est une base de $F$.

$\dim(F) = \text{card}(I_3, B) = 2$.

2) $G = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = M \}$

Soit $(M, N) \in G$
$\lambda \in \mathbb{R}$.

On a. $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

- $O_3^{\,2} = O_3$ donc $O_3 \in G$ donc $G \neq \{0\}$.

- $\cancel{(\lambda M)^2} = \cancel{\lambda M}$ Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$

$$(\lambda M + N)^2 = (\lambda M)^2 + \lambda MN + N^2$$

$$= \lambda M + \lambda MN + N \qquad \text{car } \lambda M \in G,\ N \in G.$$

~~Soit~~ $\cancel{M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}$

$\cancel{M \in G \iff M^2 = M}$

$$\cancel{\begin{pmatrix} a^2 + db + cg & ab + be + ch & ca + fb + ci \\ ad + de + fg & db + e^2 + fh & dc + ef + fi \\ ga + dh + gi & gb + eh + hi & gc + fh + i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}$$

$$\lambda MN = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} aa' & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

On a $I \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$I_3^2 = I_3$ donc $I_3 \in G$.

On avec : $3I_3$ : $(3I_3)^2 = 9I_3^2 = 9I_3$.

$9I_3 \neq 3I_3$ donc $3I_3 \notin G$.

Donc G ne ~~suit~~ pas la règle de multiplication par un réel d'un espace vectoriel.
Donc G n'est pas un sous espace vectoriel.

3) a) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} I_3 + \left(-\frac{1}{3}\right) B$

Donc A s'écrit comme combinaison linéaire de $I_3$ et de B.
Donc $A \in F$.

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Donc $A^2 = A$ donc $A \in G$.

Donc $A \in G \cap F$

3) b) On a $A^2 = A$ donc $A^2 - A = 0$

Soit $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$
P est un polynôme annulateur de A.

3) c) $Sp(A) \subset \{\text{racine de } P\} = \{0; 1\}$.

Étudions 0 :
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ / $X \neq 0$ :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Nom

Prénom (s)

Signature

20 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 2 / 10

Numéro de table 35



Exercice 1 (suite)

3)c)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $0$. De plus $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre, comme Vect de $E_0(A)$, elle génère $E_0(A)$ et en forme une base.

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad ; \quad \dim(E_0(A)) = \mathrm{card}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 1.$$

<u>Étudions 1</u>  Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ / $X \neq 0$.

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



$\Leftrightarrow \quad -x-y-z=0 \quad \Leftrightarrow x=-y-z \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont tous les deux non-nuls donc ce sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1.

De plus ils sont non-colinéaires ~~donc ils forment une base de~~ ~~$E_0(A)$~~ donc $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Comme Vect de $E_1(A)$, cette famille génère $E_1(A)$.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

$\dim E_1(A) = 2$

3) d) On a 0 valeur propre donc A n'est pas inversible.

On a $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_0(A))$

$= 2 + 1 = 3.$

Or $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

# Partie II

4)a) $M \in G \iff M^2 = M$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2 = b. \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(2a+b-1) = 0. \end{cases}$$

4)b) $M \in \cancel{F} \cap \cancel{G} \iff M \in G$ et $M \in F$.

Par la 4)a) on reprend $M \in G$ et comme $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $M \in F$.

Donc $M \in F \cap G. \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(2a+b-1) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2-a = 0 \\ b = 0 \text{ ou } 2a+b-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \text{ et } a^2-a=0 & (*) \\ 2a+b-1=0 \text{ et } a^2+2b^2-a=0 & (**). \end{cases}$$

$$(*) \iff \begin{cases} b=0 \\ a(a-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \text{ et } a=0 \\ b=0 \text{ et } a=1. \end{cases}$$

$O_3$ et $I_3$ sont les matrices qui remplissent ces conditions

Donc $(O_3, I_3) \in F \cap G$.

$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b-1=0 \\ a^2+2b^2-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-2a \\ a^2+2(1-2a)^2-a=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1-2a \\ a^2+2(1-4a+4a^2)-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-2a \\ 9a^2-9a+2=0 \end{cases}$

$\Delta = (-9)^2 - 4\times 9\times 2 = 81-72=9$.

Donc $a_1 = \dfrac{9-\sqrt{9}}{18} = \dfrac{1}{3}$ et $a_2 \dfrac{9+\sqrt{9}}{18} = \dfrac{2}{3}$

sont les deux solutions de $9a^2-9a+2$.

$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \quad \text{et } b=-\frac{1}{3} \\ \text{ou } a=\frac{1}{3} \quad \text{et } b=\frac{1}{3}. \end{cases}$

On a avec $a=\frac{2}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$ la matrice $A$.

De même avec $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$ on reconnait $I_3-A$ :

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

Ces 4 matrices sont les seules a remplir ces conditions donc

$$F\cap G = \{I_3, O_3, A, I_3-A\}.$$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Nom

Prénom (s)

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 3 / 10

Numéro de table



Exercice 1 (suite)

Partie II (suite)

5) On a $\dim(F) = 2$ par la 1).

$I_3 - A \in F$ par la 4) car $I_3 - A \in F \cap G$.
de même $A \in F$ par la 4)

<u>$(I_3 - A, A)$ libre ?</u> Soit $I_3 - A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Les deux vecteurs sont non-colinéaires donc $(I_3 - A, A)$ est libre.

De plus $\mathrm{card}(I_3 - A, A) = 2 = \dim(F)$ donc

$(I_3 - A, A)$ est une base de $F$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



6) a)

$$\alpha A + \beta B = \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 2(4a-b) & -(4a-b) & -(4a-b) \\ -(4a-b) & 2(4a-b) & -(4a-b) \\ -(4a-b) & -(4a-b) & 2(4a-b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ a+2b & a+2b & a+2b \\ a+2b & a+2b & a+2b \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9a & & \\ -3a+3b & 9a & \\ -3a+3b & & 9a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = M.$$

Donc $\alpha A + \beta B = M$.

6)b) $AB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= O_3$

$BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} O_3 = O_3 = AB.$

Donc $A$ et $B$ commutent.

6)c) $M = \alpha A + \beta B$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$M^n = (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k}$ car $A$ et $B$ commutent.

Or $AB = BA = O_3$ donc $= \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k} \alpha^k \beta^{n-k}$

$= \beta^n A^0 B^n + \alpha^n B^0 A^n$

$= \beta^n B^n + \alpha^n A^n.$

Or $(B, A) \in F \cap G$ donc $\cancel{A^n} = A^2$
$B = B^2$.

. Montrons par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $S_n$ "$A^n = A$, $B^n = B$" est vraie.

. $B = B^2$
$A = A^2$ donc $S_1$ est vraie.

. Supposons $S_n$ vraie ~~pour~~ $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque et montrons $S_{n+1}$ vraie.

. $A^n = A \Rightarrow A^{n+1} = A^2 = A$
$B^n = B \Rightarrow B^{n+1} = B^2 = B$ donc $S_{n+1}$ est vraie.

. Ainsi $S_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par principe de récurrence.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $M^n = \beta^n B^n + \alpha^n A^n = \beta^n B + \alpha^n A$.

<u>cas $n = 0$</u>: $\alpha^0 A + \beta^0 B = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= I = M^0.$

Donc cette formule est valable pour $n = 0$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Nom

Prénom (s)

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 4 / 10

Numéro de table 35



Exercice 1 (suite)

Partie II (suite)

7/a). si : $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$ donc :

$M(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B) = (\alpha A + \beta B)(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B)$

$= \frac{\alpha}{\alpha} A^2 + \frac{\beta}{\beta} B^2 + \frac{\alpha}{\beta} AB + \frac{\beta}{\alpha} BA$ avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$

$= A + B$

$= I_3$ donc $M$ est inversible.

. si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ :

$M = A$ ou $M = B$ ou $M = O_3$.

Or $O_3$ est non inversible, de même pour $A$.

$I_3 - A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; on a $C_1 = C_2$ donc $I_3 - A$ est non-inversible.

Donc $M$ est inversible $\iff (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



7)b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^*$.

Donc $M$ est inversible.

. Montrons par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n$ " $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$ " est vraie.

. $M^0 = \alpha^0 A + \beta^0 B$ par la 6)c). donc $P_0$ est vraie

~~. Supposons $P_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et montrons $P_{n+1}$ vraie~~

~~. $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B \Rightarrow M^{-(n+1)} = \alpha^{-n}$~~

$$M(\alpha^{-1} A + \beta^{-1} B) = (\alpha A + \beta B)(\alpha^{-1} A + \beta^{-1} B)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha} A^2 + \frac{\alpha}{\beta} AB + \frac{\beta}{\alpha} BA + \frac{\beta}{\beta} B^2$$

$= A + B = I_3$ donc $M^{-1} = \alpha^{-1} A + \beta^{-1} B$ ; $P_1$ est aussi vraie.

. Supposons $P_n$ vraie pour $\mathbb{N}^*$ fixé quelconque et montrons $P_{n+1}$ vraie.

• $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B \Rightarrow M^{-(n+1)} = (\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B)(\alpha^{-1} A + \beta^{-1} B)$

$\Rightarrow M^{-(n+1)} = \alpha^{-(n+1)} A^2 + \beta^{-(n+1)} B^2 + 0 + 0$

$\Rightarrow M^{-(n+1)} = \alpha^{-(n+1)} A + \beta^{-(n+1)} B$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

## Partie III

8) $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= - A + (-4) B.$

9) Par la 7)

10) $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ / $L = TL + Y$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z + 1 \\ x + 3y + z - 1 \\ x + y + 3z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - 3z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - 3z = -1 \\ -4z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ce $L$ est unique.

11) $X_{n+1} = TX_n + Y$

$\Leftrightarrow X_{n+1} - L = TX_n + Y - L$ or $L = TL + Y$

$\Leftrightarrow Y - L = -TL$

$\Leftrightarrow X_{n+1} - L = T(X_n - L)$.

. Montrons par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n$ " $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ " est vraie.

. $X_0 - L$ ; $T^0(X_0 - L) = X_0 - L$ donc $P_0$ est vraie.

. Supposons $P_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et montrons $P_{n+1}$ vraie.

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 / 10

Numéro de table 35

Exercice 1 (suite)

Partie II (suite)

11) $X_n - L = T^n(X_0 - L) \Rightarrow T(X_n - L) = T^{n+1}(X_0 - L)$

$\Rightarrow X_{n+1} - L = T^{n+1}(X_0 - L)$ par début de question

donc $P_{n+1}$ est vraie.

. Ainsi $P_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

$X_{n+1} - L = T^n(X_0 - L)$.

12) $X_n - L = (-A - 4B)^n (X_0 - L)$

$\Leftrightarrow X_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A^k (-4)^{n-k} B^{n-k} (X_0 - L) + L$ par la formule du binôme, A et B commutant.

$= ((-1)^n A^n + (-4)^n B^n + 0)(X_0 - L) + L$

$= ((-1)^n A + (-4)^n B)(X_0 - L) + L$

$= ((-1)^n A + (-4)^n B) X_0 - (-1)^n AL - (-4)^n BL + L$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



Exercice 2

Partie I

1) $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \exp\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right) \ln(x)\right)$

$\frac{2x-1}{x} \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{x} \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x) = +\infty$ donc par composition de limite :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = 2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x) = -\infty$

Donc par composition de limite :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

2)a) $h$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme
* d'un fonction polynomiale $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
* de la fonction logarithme $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{2x+1}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$

Donc $h$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) b) $h$ est $\mathcal{C}^0$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le théorème de la bijection elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,

avec : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Or $0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists!\ \alpha \ / \ h(\alpha) = 0.$

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1/2) + 1 - 1 = -\ln(2)$

$h(1) = 1$

$h\left(\frac{1}{2}\right) \leq h(\alpha) < h(1)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$ car $h$ bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) c) $g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composition
* du produit d'une fonction logarithme $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ~~et~~ de la somme d'une constante et de la fonction inverse $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
* par la fonction exponentielle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$g'(x) = \left(\frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{x}\right) + \ln(x)\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \frac{1}{x^2}\left(2x - 1 + \ln(x)\right) \qquad g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\, h(x)\; g(x).$$

2) d) $\frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$h(x) > 0 \quad \forall x > \alpha$ sinon $h(x) < 0$.

$g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. ainsi $g'(x) < 0 \quad \forall x < \alpha$

Donc : $g'(x) > 0 \quad \forall x > \alpha$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ | $\searrow$ | $\exp\left(\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)\ln(\alpha)\right)$ | $\nearrow$ | |

;

3) $g(x) - x^2 = \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2 = x^2 \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2$

$= x^2\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée

Donc $x^2\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} x^2\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} -x\ln(x)$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Nom

Prénom (s)

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 6 / 10

Numéro de table 35

Exercice 2 (suite)

Partie II

4) $v_0 > 0$ ; $v_{n+1} = g(v_n)$.

- Montrons par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n$ "$v_n > 0$ et $v_n$ existe" est vraie
- $v_0 > 0$, $v_0$ existe donc $P_0$ est vraie.
- Supposons $P_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et montrons $P_{n+1}$ vraie.
- $v_n > 0$ donc $g(v_n)$ existe car $g$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

  donc $v_{n+1}$ existe.

  de plus $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $g(v_n) > 0 \Leftrightarrow v_{n+1} > 0$.

Donc $P_{n+1}$ est vraie

- Ainsi $P_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

$v_n > 0$ et $v_n$ existe. $\forall n \in \mathbb{N}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



5)
```
function y = f(u0, n)
    y = zeros(1, n+1)
    y(1) = u0
    for i = 2: n+1
        y(1,i) = exp((2-1/(y(1,i-1))) log(y(1,i-1))
    end
endfunction
```

6)a) $x > 0$ : $x-1>0 \iff x>1$

$\ln(x) > 0 \iff x > 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-1)\ln(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |

6)b) $(x-1)\ln(x) \geq 0$ .

6)c) on a $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1 \quad \forall x > 0$

$\Leftrightarrow g(x) \geqslant x$.

$g(1) = \exp\left(\left(e - \frac{1}{1}\right)\ln(1)\right) = \exp(0) = 1$ donc 1 est solution de cette équation.

7) Variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$u_{n+1} = g(u_n) = \exp\left(\left(2-\frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) \geqslant u_n.$$

Donc si $u_n \neq 1$ par la 6)c) : $u_{n+1} > u_n$ donc $(u_n)$ croissante.

~~Cas $u_0 = 1$ : on pourrait montrer par récurrence que $u_n$ est constante.~~

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ / $u_{n_0} = 1$.

. Montrons par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0$ $P_n$ "$u_n = 1$" est vraie.

. $u_{n_0} = 1$ ~~s~~upposé donc $P_{n_0}$ est vraie.

. Supposons $P_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0$ fixé quelconque et montrons $P_{n+1}$ vraie.

. $u_n = 1 \Rightarrow g(u_n) = g(1)$

$\Rightarrow u_{n+1} = 1$ car $g$ n'admet qu'une seule solution pour $g(x) = x$.

Donc $P_{n+1}$ est vraie.

. Ainsi $P_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0$.

Donc $u_n$ est constante à partir d'un terme égale à 1.

Donc si $u_0 = 1$ alors $(u_n)$ est constante et égale à 1.

si $u_0 \neq 0$ alors $(u_n)$ est strictement croissante.

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature

Nom

Prénom (s)



Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 7 / 10

Numéro de table 35

Exercice 2 (suite)

Partie II

8)a) Soit $v_0 \in [\frac{1}{2} ; 1]$.

. Montrons par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n$ : "$v_n \in [\frac{1}{2};1]$" est vraie

. $v_0 \in [\frac{1}{2} ; 1]$ donc $P_0$ est vraie.

. Supposons $P_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et montrons $P_{n+1}$ vraie

. $\frac{1}{2} \leq v_n \leq 1$ ~~$\Rightarrow$ $g(v_n) \leq g(1$~~

. J

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



8)b) On a $v_0 \in [\frac{1}{2} ; 1]$.

si $v_0 = 1$ alors $(v_n)$ est constante donc $(v_n)$ converge

et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

si $v_0 \neq 1$ alors $(v_n)$ est croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone elle converge et sa limite $\ell$ est donnée par $g(\ell) = \ell$, or il n'y a qu'un seul tel $\ell$ qui appartienne à $[\frac{1}{2} : 1]$ : $\ell = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell = 1$.

9) $u_0 > 1$.

9)a) Récurrence : $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_n$ " $u_n > 1$ " :

Initialisation $n = 0$ : $u_0 > 1$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie.

Récurrence $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque : $u_n > 1 \Rightarrow g(u_n) > g(1)$ car $g$ croissante sur $[\alpha ; +\infty[$
$\Rightarrow u_{n+1} > 1$. et $\alpha \leq 1$

$\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a donc $u_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

9)b) Si $(u_n)$ admet une limite alors $\exists \ell \in \mathbb{R} / g(\ell) = \ell$.
$\ell > 1$.

Or il n'existe pas de tel $\ell$.

Donc $(u_n)$ diverge et $u_n$ est croissante donc :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

10) $0 < u_0 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow g(u_0) > g\left(\frac{1}{2}\right)$ car $g$ est décroissante sur $]0 ; \alpha]$.

$\Rightarrow u_1 > 1$.

On est ramené au cas de la 9). Donc $(u_n)$ diverge.

Partie III

11) $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme composition :

* du produit d'une fonction logarithme $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par ~~la~~ somme de ~~la~~ fonction polynomiale $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et de ~~la~~ fonction inverse $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

* par la fonction exponentielle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

12) $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ouvert

$$\partial_1(f)(x,y) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\right) f(x,y)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + yx - 1\right) f(x,y)$$

$$= \frac{\ln(x) + yx - 1}{x^2} f(x,y)$$

$$\partial_2(f)(x,y) = (1 \times \ln(x))\ f(x,y) = \ln(x) f(x,y).$$

13) $(x,y)$ point critique de $f$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + yx - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + ye - 1}{e^2} = 0 \\ x = e \end{cases}$ car $f(x,y) > 0$ comme fonction exp.

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = e \end{cases}$ soit $a = (e, 0)$.

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted] / [redacted] / [redacted]

Nom [redacted]

Prénom (s) [redacted]

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 8 / 10

Numéro de table 35

Exercice 2 (suite).

Partie III

14)

15) $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; $Tr(H) = 2$.

Soit $(\lambda, \mu) \in Sp(H)$, on a : $\lambda * \mu = 2 \times 0 - 1 \times 1 = -1$

Donc $\lambda$ et $\mu$ sont de signe opposés.

Donc a est un point col.

a n'est pas un extremum global.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

16) La fonction f n'admet pas d'autres points critiques que a, a n'est pas un extremum mais un point col.
En l'absence d'autres candidats, on peut affirmer que f n'admet pas d'extremum globale sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Exercice 3.

Partie I

1/a) 3 urnes
Si on définit comme succès l'évènement "le jeton va dans l'urne $U_1$" alors on définit une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{3}$ (par équiprobabilité).
$X_n$ est la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès au cours de n tirages.
On a donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

De même pour les urnes $U_2$ et $U_3$ on a :

$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$

$Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

1)b) $\mathbb{P}(X=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\mathbb{P}(X=n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

1)c) $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ : au cours des $n$ premiers tirages, aucun jeton n'est allé dans l'urne $U_2$ ni $U_3$, donc tous sont allés dans l'urne $U_1$.

$[X_n = n]$ : tous les jetons sont dans l'urne $U_1$.

Donc $[Y_n=0] \cap [Z_n=0] = [X_n = n]$.

1)d) $V_n = [X_n=0] \cup [Y_n=0] \cup [Z_n=0]$.

1)e) $\mathbb{P}(V_n) = \mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}(Y_n=0) + \mathbb{P}(Z_n=0)$ par la formule du crible.

$- \mathbb{P}(X_n=0 \cap Y_n=0) - \mathbb{P}(X_n=0 \cap Z_n=0) - \mathbb{P}(Z_n=0, Y_n=0)$

$+ \mathbb{P}(X_n=0 \cap Y_n=0 \cap Z_n=0)$

$= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 0$ car $[X_n=0 \cap Z_n=0 \cap Y_n=0] = \emptyset$

$= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$

On a de plus $V_n \subset V_{n+1}$ donc $(V_n)$ est décroissante. D'après le théorème de la limite monotone :

$\mathbb{P}(V) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = \lim_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

3) a)

```
while X=0 or Y=0 or Z=0

liste(i) = liste(i)+1



t = n
```

3) b)

```
H = 0
E = 0
for i = 1:10 000
    H = T() + H
end
E = H/(10 000)
disp(E)
```

4) $T(\Omega) = [\![ 3 ; +\infty [\![$ car il faut au moins 3 tirages pour que les 3 urnes aient déjà jeton.

5) $[T=n]$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature

Nom

Prénom (s)

20 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 9 / 10

Numéro de table 35



Exercice 3 (suite)

6) T admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} |kP(T=k)|$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} kP(T=k)$ converge   $n \geq 0$, $P(T=n) \geq 0$.

$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} k\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) - k\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right)$

~~Soit $N \in \mathbb{N} / N \geq 3$ :~~

Or les séries ~~de terme géné~~ géométriques dérivées de terme général $k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ ~~et~~ $k\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$ converge donc la série de terme général $kP(T=k)$ converge et T admet une espérance.

$E(T) = \sum_{k=3}^{+\infty} 3k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 6k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} -$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



Partie II

7) a) Loi de $(X_2, W_2)$ : $W_2(\Omega) = [\![1;2]\!]$ ; $X_2(\Omega) = [\![0;2]\!]$.

- ~~$\mathbb{P}(X_2 = 0, W_2 = 2) = \mathbb{P}(Y_2 = 2 \cup Z_2 = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 = \frac{2}{9}$. par incompatibilité~~

~~$\mathbb{P}(X_2 = 0, W_2 = 1) = \mathbb{P}(Y_2 = 1, Z_2 = 1)$~~

- $\mathbb{P}(W_2 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(Z_2 = 2 \cup Y_2 = 2) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ par incompatibilité.

$\mathbb{P}(W_2 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(Z_2 = 1, Y_2 = 0 \cup Y_2 = 1, Z_2 = 0)$

$\mathbb{P}(W_2 = 1, X_2 = 2) = 0$

$\mathbb{P}(W_2 = 2, X_2 = 0) = 0$

$\mathbb{P}(W_2 = 2, X_2 = 1) = 0$

$\mathbb{P}(W_2 = 2, X_2 = 2) = 1$

$E(W_2) = \frac{4}{3}$

8) $W_n(\Omega) = [\![0 ; 2]\!]$ car il ne peut y avoir 3 urnes vides après 3 tirages

9)a) $W_{n,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est vide après } n \text{ placement} \\ 0 & \end{cases}$

1 est vide après le $n$-ième placement : $[X_n = 0]$ ; de même $[W_{n,2} = 1] = [Y_n = 0]$
$[W_{n,3} = 1] = [Z_n = 0]$

Donc $E(W_{n,i}) = \sum_{k=0}^{1} k \, \mathbb{P}(W_{n,i} = k)$

$= 0 + \mathbb{P}(W_{n,i} = 1)$

$= \mathbb{P}(X_n = 0)$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^n$ car $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

9)b) $W_n = \sum_{i=1}^{3} W_{n,i}$

9)c) $E(W_n) = \sum_{i=1}^{3} E(W_{n,i})$ par linéarité de l'espérance.

$= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

10) $[X_n = n] \cap [W_n = 2] = \bigcap_{i=1}^{n} U_{1,i}$ avec $U_{1,i}$ : le jeton $i$ va dans l'urne 1.

$\mathbb{P}(X_n = n, W_n = 2) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_{1,i}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

par indépendances des tirages de jeton.

$\forall k \in [\![1; n-1]\!]$ : $[X_n = k \cap W_n = 2] = \emptyset$ car si $k \leq n-1$ alors il y a au moins 2 urnes non-vides,

donc $\mathbb{P}(X_n = k, W_n = 2) = 0$.

11) $[X_n = n, W_n = 1] = \emptyset$ car il ne peut y avoir 2 urnes ~~plus~~ non-vides si tous les jetons sont dans l'urne 1.

$\mathbb{P}(X_n = n, W_n = 1) = 0$

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted]

Signature

Nom [redacted]

Prénom (s) [redacted]

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 10 / 10

Numéro de table 35

Exercice 3 (suite)

13) $\text{Cov}(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n)$

$$= n\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times n \times \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n (n - n)$$

$$= 0$$

14) La covariance de $W_n$ et $X_n$ est nulle, toutefois ces deux variables ne sont pas indépendantes.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



13) Calcul

$$E(X_n W_n) = 2n\, \mathbb{P}((X_n = n), W_n = 2) + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}(X_n = k, W_n = 1)$$

$$= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{[illegible]} k$$