



Une semaine, un classique #14

D'après EDHEC 2021 (ECS)

Difficulté : (*)

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

- 1) Montrer que, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

- 2) Pour tout q de \mathbb{N} , on considère la propriété H_q : « $\forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$ ».

Montrer par récurrence sur q que cette propriété est vraie.

- 3) Donner alors une expression de $I(p, q)$ en fonction de p et q uniquement, pour p et q des entiers naturels.