ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

DYLAN

Note de délibération : 18.61 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) DYLAN

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 039

Exercice 1:

Partie 1 :

1)

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{X} \right)$$

$$= \text{Vect}(I_3, X)$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car généré par une famille de matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Cette famille génératrice est libre car I_3 et X ne sont pas colinéaires. Elle constitue dons une base de F et $\dim F = 2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

2) . $G \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

. $G \neq 0_E$ car $0 \in G$ ($0^2 = 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \forall M \in G \\ \forall N \in G \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha M + N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$(\alpha M + N)^2 = \alpha^2 M^2 + 2\alpha MN + N^2$$
$$= \alpha^2 M + 2\alpha MN + N \quad \text{car } (M, N) \in G^2$$

~~Ainsi, $\alpha M + N$~~

3) a. $$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{3}[2I - X] \quad \text{d'après la 1)}$$

Ainsi $A \in F$ car combinaison linéaire de I et X.

. $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

Ainsi, $A \in G$.

. Conclusion : $A \in F \cap G$.

b. $A^2 = A \iff A^2 - A = 0$

Ainsi, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A.

c. D'après le cours, les valeurs propres possibles de A sont les racines du polynôme

$$X^2 - X = 0$$

$$\iff X(X-1) = 0$$

$$\iff X = 0 \quad \text{ou} \quad X = 1$$

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont 0 et 1 :

$$Sp(A) \subset \{0 ; 1\}.$$

. Recherche de l'espace propre associé à 0 : E_0 :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$\underline{E_0} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq 0_E$ donc 0 est bien valeur propre.

La famille étant génératrice et libre est donc une base de E_0 et $\dim E_0 = 1$.

Numéro d'inscription 501244

Né(e) le 01/11/2002

Nom CORNET

Prénom (s) DYLAN

Signature

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/07

Numéro de table 039

Recherche de l'espace propre associé à 1 : $\mathcal{E}_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_1 \iff (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ -x-y-z=0 \iff x=-y-z \right.$$

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq 0_E \text{ donc } 1 \text{ est bien valeur propre.}$$

Cette famille génératrice est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et constitue donc une base de $\mathcal{E}_1$ et $\dim \mathcal{E}_1 = 2$.

d. 0 est valeur propre $\iff$ A est non-inversible.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ admet 2 valeurs propres : 0 et 1} \\ \dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_0 = 2+1 = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A est diagonalisable}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

Partie 2 :

4) a. $M \in G \iff M^2 = M$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b^2+2ab = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b^2-2ab-b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $M \in G \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

b.

5) A et B $\in F$ d'après 1a 4)b

On détient une famille génératrice

Est-elle libre ?

Supposons qu'il existe 2 réels a et b tels que

$$aA + bB = O_3 \quad (*)$$

A-t-on nécessairement $a = b = 0$?

$$(*) \iff \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{b}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a+b & -a+b & -a+b \\ -a+b & 2a+b & -a+b \\ -a+b & -a+b & 2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2a+b = 0 \\ -a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3b = 0 \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (A,B) est une famille génératrice et libre $\Big\} \Rightarrow$ (A,B) est une base de F.

6) a. $\dfrac{4a-b}{3}A + \dfrac{a+2b}{3}B$

$$= \frac{4a-b}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{a+2b}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8a-2b+a+2b & -4a+b+a+2b & -4a+b+a+2b \\ -4a+b+a+2b & 8a-2b+a+2b & -4a+b+a+2b \\ -4a+b-a+2b & -4a+b-a+2b & 8a-2b+a+2b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9a & -3a+3b & -3a+3b \\ -3a+3b & 9a & -3a+3b \\ -3a+3b & -3a+3b & 9a \end{pmatrix} = M$$

b- $AB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= O_3$

$BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= O_3$

c- A et B commutent car $AB = BA$, on peut donc utiliser la formule du binôme pour les matrices :

$M^n = (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k}$

or $AB = O_3$

donc, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$

7) a Résonons par l'absurde

Supposons $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

on a donc $M = 0A + 0B$

soit $M = O_3$

$\Leftrightarrow M^{-1}M = O_3$

$\Leftrightarrow I_3 = O_3$

or $I_3 \neq O_3$ donc M est inversible $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

b- $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ d'après la 6) c

$\Leftrightarrow (M^n)^{-1} = (\alpha^n A + \beta^n B)^{-1}$

$\Leftrightarrow M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$

Numéro d'inscription 50124 4

Né(e) le 01/11/2002

Nom CORNET

Prénom (s) DYLAN

18.61 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 039

Partie 3 :

8) $I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$= -A + 4B$

9) $(I_3 - T)^{-1} = (-A + 4B)^{-1} = (-1)^{-1} A + 4^{-1} B$

$= -A + \frac{1}{4} B$

10) $L = TL + Y$

$\Leftrightarrow TL + Y - L = 0$

$\Leftrightarrow L(T - I) + Y = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ 2y - 1 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$

donc $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

11) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = T^n(X_0 - L)$

Initialisation: $n=0$

. $X_0 - L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

. $T^0(X_0 - L) = I(X_0 - L) = X_0 - L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, l'égalité est initialisé

hérédité: Supposons que l'égalité est vraie au rang n soit

$X_n - L = T^n(X_0 - L)$

Montrons qu'elle est vraie au rang n+1 soit

$X_{n+1} - L = T^{n+1}(X_0 - L)$

$X_{n+1} - L = T(X_n - L)$

$= T \times T^n (X_0 - L)$ d'après notre hypothèse de récurrence

$= T^{n+1}(X_0 - L)$

L'égalité est héréditaire.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = T^n(X_0 - L)$

Exercice 2 :

Partie 1 :

1) . Limite en 0^+ :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} e^{\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty}$$

. Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}.$$

2) a. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x} + 2$

$$= \frac{2x+1}{x} > 0$$

Ainsi, <u>h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$</u>.

b. . h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions usuelles continue sur $\mathbb{R}_+^*$

. h est strictement monotone (strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^*$.

d'où d'après le cours, h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]\lim_{x\to 0^+} h(x) ; \lim_{x\to +\infty} h(x)[$.

. Limite en 0^+.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$$

. Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$$

Ainsi, h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$

d'où par définition de la bijection, 0 admet un unique antécédant noté α sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, l'équation $h(x)=0$ a pour unique solution $\alpha > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} . \ h(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) + 1 - 1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ . \ h(\alpha) = 0 \text{ par définition} \\ . \ h(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h(\frac{1}{2}) < h(\alpha) < h(1) \\ \text{or } h \text{ est strictement} \\ \text{croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{donc } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \end{array}$$

On a donc bien $\underline{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$.

Numéro d'inscription 501244

Né(e) le 01/11/2002

Nom CORNET

Prénom (s) DYLAN

Signature

18.61 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 039

2) c - g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car produit et composée de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x>0, \quad g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln x + \left(2-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x}$$

$$= \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln x + 2x - 1\right) e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x}$$

$$= \underline{\frac{1}{x^2} h(x)\, g(x)}$$

d - $u : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$

et $g(x) \geqslant 0$ car exponentielle

Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $h(x)$.

D'où le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d'après la 2)b

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

Ainsi, g est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

3)

— Partie 2 : —

4) Initialisation : $n=0$

. $U_0>0$ donc U_0 existe et la propriété est vérifiée.

hérédité : Supposons U_n existe et $U_n>0$ au rang n.

Montrons que U_{n+1} existe et $U_{n+1}>0$ au rang $n+1$.

$U_{n+1}=g(u_n)$ or $U_n>0$ d'après notre hypothèse de récurrence donc U_{n+1} existe

et $g(U_n)=e^{(2-\frac{1}{u_n})\ln(u_n)}>0$ car exponentielle

Ainsi $U_{n+1}>0$

la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, U_n existe et $U_n>0$.

5)

6) a. Introduisons la fonction $u : x \mapsto (x-1)\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
u est dérivable car produit de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Etudions ses variations.

$\forall x>0, \quad u'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x}$

$$= \frac{x\ln x + x - 1}{x}$$

$u'(x)$ est du signe du numérateur.
introduisons la fonction $i : x \mapsto x\ln x + x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Etudions ses variations.

$\forall x>0, \quad i'(x) = \ln x + 1 + 1$

$= \ln x + 2 \qquad \ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e^2}$

d'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{e^2}$		$+\infty$
$i'(x)$		$-$	0	$+$	
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	>0	$\nearrow$	

$u\left(\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^2} - 1\right)\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$
$= \left(\frac{1}{e^2} - 1\right) \times (-2) > 0$

Ainsi, $\forall x>0, \; (x-1)\ln x > 0$.

6) b - $\forall x>0, \quad \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{e^{(2-\frac{1}{x})\ln x}}{x}$

6)c. $\forall x>0$, $\frac{g(x)}{x} \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq x$

$g(1) = e^{(2-1)\ln(1)} = e^0 = 1$

donc 1 est bien une solution de $g(x)=x$

or sur $[1; +\infty[$, g est strictement croissante d'après la 2)d car $\alpha < 1$ et g est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

[Ainsi, d'après le théorème de la bijection, 1 est l'unique solution de l'équation $g(x)=x$.]

7) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

$$= e^{(2-\frac{1}{u_n})\ln(u_n)} - u_n$$

or d'après la 6)c, $g(x) \geq x$ $\forall x>0$

et $u_n > 0$ d'après la 4

donc $g(u_n) > u_n$

$\Leftrightarrow g(u_n) - u_n > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

8) a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}; 1[$

- Initialisation : $n=0$

$u_0 \in [\frac{1}{2}; 1[$ donc la propriété est initialisée.

- hérédité : Supposons que la propriété soit vraie au rang n soit $u_n \in [\frac{1}{2}; 1[$

Montrons qu'elle est vraie au rang n+1 soit $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}; 1[$

Numéro d'inscription 501244

Né(e) le 01/11/2002

Nom CORNET

Prénom (s) DYLAN

18.61 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/07

Numéro de table 039

$U_{n+1} = g(U_n)$

or $U_n \in [\frac{1}{2}, 1)$ d'après notre hypothèse de récurrence

8)b. (U_n) est croissante et majorée (par 1), d'où d'après le théorème de convergence monotone, (U_n) est convergente.

Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

or $U_{n+1} = g(U_n)$

soit $\ell = g(\ell)$

$\Leftrightarrow \ell = e^{(2-\frac{1}{\ell})\ln(\ell)}$

or $g(x) = x$ admet pour unique solution 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la 6)c.

et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$

donc $g(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = 1$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

9) a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$

- Initialisation : $n=0$

$U_0 > 1$ donc la propriété est initialisée.

- hérédité : Supposons que la propriété est vraie au rang n soit $U_n > 1$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ soit $U_{n+1} > 1$

$U_{n+1} = g(U_n)$

or $\forall x > 0$, $g(x) > x$

et $U_n > 1 > 0$ d'après notre hypothèse de récurrence

donc $g(U_n) > U_n > 1$

soit $g(U_n) > 1$

soit $U_{n+1} > 1$

La propriété est héréditaire.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

b.

Partie 3 :

11) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car composée de fonction usuelles de classe C^2.

12) . $\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{x^2}\ln x + (y-\frac{1}{x})\frac{1}{x}\ e^{(y-\frac{1}{x})\ln x}$

$$= \frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\ e^{(y-\frac{1}{x})\ln x}$$

$$= \underline{\frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\ f(x,y)}$$

. $\partial_2(f)(x,y) = \ln x\ e^{(y-\frac{1}{x})\ln x}$

$$= \underline{\ln x\ f(x,y)}$$

13) (x,y) est un point critique de $f \iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \frac{\ln x + xy + 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln x\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x + xy + 1 = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases}$$ car $x^2 \neq 0$ et $f(x,y) \neq 0$ car exponentielle

$$\iff \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi, f admet un unique point critique au point $\underline{a = (1, -1)}$

14) $\cancel{\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{(\frac{1}{x}+y)f(x,y) - 2x(\ln x + xy - 1)}{x^2}}$

15) λ est valeur propre de $A \iff (2-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$

$= 8$

$x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} > 0 \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} < 0$

Ainsi, A admet deux valeur propre de signes opposés donc d'après le critère de Monge, f n'admet pas d'extremum local au point a.

Numéro d'inscription 501244

Né(e) le 01/11/2002

Signature

Nom CORNET

Prénom (s) DYLAN

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/07

Numéro de table 039

Exercice 3:

Partie 1:

1)a. X_n (respectivement Y_n et Z_n) compte le nombre d'évènements A : " on met un jeton dans l'urne U_1" (respectivement B et C) réalisé au cours de n épreuves identiques et indépendantes avec la probabilité $p = \frac{1}{3}$.

Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$
de même pour Y_n et Z_n

b. $(X_n = 0)$ = " Il y a 0 jeton dans l'urne U_1 après n épreuves"

$\Rightarrow p(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$[X_n = n)$: " Tous les jetons sont allés dans l'urne U_1 "

$\Rightarrow p(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c. $[Y_n = 0) \cap [Z_n = 0)$ = " Après n épreuves, aucun jeton ne se trouvent dans l'urne U_2 ou U_3"
= " tous les jetons sont dans l'urne U_1" après n épreuves
= $[X_n = n)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

d- $V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$

e- V_n : " Une urne est vide ou alors deux urnes sont vides et l'autre est remplie par les n jetons "

$$\Rightarrow p(V_n) = \underbrace{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{les jetons sont répartis dans 2 urnes}} - \underbrace{3\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{les jetons sont tous dans une seul urne.}}$$

2) $V = \bigcup_{k=0}^{n} V_k$

par passage à la probabilité

$$p(V) = \sum_{k=0}^{n} p(V_k)$$

$$= 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= 3 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} - 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 3\times 3\left(1-\left(\frac{3}{3}\right)^{n+1}\right) - 3\times\frac{3}{2}\left(1-\right.$$

3) a – Function $t = T()$

```
    X = 0
    ...
    While (x, y, z) r > 0
        i = grand(1, 1, 'uin', 1, 3)
        liste(i) = (x, y, z)
        n = n+1
    end
    t = n
endfunction
```

b – . Au minimum, il faut 3 tirages pour que chaque urne contienne au moins 1 jeton : $T = 3$

. Au maximum, il faut une infinité de tirages pour que chaque urne contiennent au moins un jeton : $T = +\infty$

. Les cas intermédiaires sont possibles.

Donc $T(\Omega) = [\![3 ; +\infty[\![$

5) $(T=n)$: "il a fallut n tirages pour que chaque urne contienne une boule"

: "au $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage, un urne ne contenait pas de boule mais au $n$ième celle-ci est remplie par une boule"

$\Rightarrow$ $p(T=n) = p(V_{n-1}) - p(V_n)$

6) $\mathcal{E}(T) = \sum_{k=3}^{+\infty} p(V_{k-1}) - p(V_k)$

$= \sum_{k=3}^{+\infty} p(V_{k-1}) - \sum_{k=3}^{+\infty} p(V_k)$

$= \sum_{k=3}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \sum_{k=3}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

Partie 2 :

7) a- $X_2(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$

$W_2(\Omega) = \{1 ; 2\}$

$p[(X_2 = i) \cap (W_2 = j)]$

- Cas où $i = 0$ et $j = 1$
  - $p[(X_2 = 0) \cap (W_2 = 1)] = \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right] \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{4}{9} \times \frac{2}{9}$

$= \frac{8}{81}$

- Cas où $i = 1$ et $j = 1$

$p((X_2 = 1) \cap (W_2 = 1)) = \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right] \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{2}{9} \times \frac{2}{9}$

$= \frac{4}{81}$

Numéro d'inscription 501244

Né(e) le 01/11/2002

Nom CORNET

Prénom (s) DYLAN

Signature

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/07

Numéro de table 039

. Cas où $i=2$ et $j=1$

$p((X_2=2)\cap(W_2=1)) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \times \frac{2}{9}$

$= \frac{2}{81}$

. Cas où $i=0$ et $j=2$

$p((X_2=0)\cap(W_2=2)) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} \times \frac{1}{9}$

$= \frac{4}{81}$

. Cas où $i=1$ et $j=2$

$p((X_2=1)\cap(W_2=2)) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$

8) . Au minimum, après le placement des n premiers jetons, 1 urne est vide

. Au maximum, deux urnes sont vides.

$W_n(\Omega) = \{1;2\}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

9) a - $w_{n,i}$