Encadrement de Rayleigh

$$R(X) = \frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2} = \frac{{}^tXAX}{\|X\|^2}$$

1) f est un endomorphisme symétrique, il est donc diagonalisable. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, distincts ou non tels que

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i}$$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ (on ne distingue pas $x \in \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \{0\}$)

$\mathcal{B}$ étant une base orthonormée, on a
$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$, où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Toujours changer d'indice pour éviter les confusions

• Alors, $\langle f(x), x \rangle = \langle f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j \rangle$

par linéarité $= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\varepsilon_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j \rangle$

$= \langle \sum_{i=1} \alpha_i \lambda_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j \rangle$

par bilinéarité $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$

Et, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Donc $\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$.

$\left(\text{d'où } \langle AX, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \right)$

- Soit λ_1 la plus petite valeur propre de f.

On a alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_1$

$\geqslant \lambda_1 \|x\|^2$

De même, si λ_n est la plus grande valeur propre de f, il vient $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \geqslant \lambda_n \|x\|^2$.

- On a donc $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$

D'où finalement, comme $x \neq 0$,

$$\boxed{\lambda_1 \leq R(x) \leq \lambda_n}$$

(encadrement de Rayleigh)

b. Montrer que λ_1 et λ_2 sont le minimum et le maximum de R, c'est montrer qu'il existe des valeurs pour lesquelles R renvoie λ_1 et λ_n : autrement dit, on veut montrer que

λ_1 et λ_n sont atteints.

Soit x_1 le vecteur propre associé à λ_1, et x_n le vecteur propre associé à λ_n.

On a $R(x_1) = \frac{\langle f(x_1), x_1 \rangle}{\|x_1\|^2} = \frac{\langle \lambda_1 x_1, x_1 \rangle}{\|x_1\|^2}$ par bilinéarité

$= \frac{\lambda_1 \|x_1\|^2}{\|x_1\|^2}$

$= \lambda_1$

Similairement, $R(x_n) = \lambda_n$.

D'où
$$\boxed{\begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} R(x) = \lambda_1 \text{ atteint en } x_1 \\ \max_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} R(x) = \lambda_n, \text{ atteint en } x_2 \end{array}}$$

(c) D'après le cours, le minimum et le maximum d'une forme quadratique sur la sphère unité (c'est-à-dire quand $\|x\|^2 = 1$), valent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de l'endomorphisme associé.

Ici, on a alors pour $q_A(X) = {}^tXAX$ et $\|X\|^2 = 1$

le résultat suivant :

$d_1 \leq q(x) \leq d_2$ et $\begin{cases} q(x_1) = d_1 \\ q(x_2) = d_2 \end{cases}$

Ce qui prouve le résultat !