ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

506

PETITEAU

RAYAN

25/10/2001

Note de délibération : 19.16 / 20

Numéro d'inscription 506[redacted]

Né(e) le 25/10/2001

Signature

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

19.16 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/07

Numéro de table 004

Exercice 2

Partie I

1) On a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

donc $2 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

et comme $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$,

alors $\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

Et par continuité de exp sur $\mathbb{R}$

$\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

D'où $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty}$

En $+\infty$:

On a $2 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.16 / 20

Et comme $\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, alors on a aussi $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$.

2.a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et différence de fonctions dérivables ($\ln$ et fonctions polynomiales)

et $\forall x > 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

$= \dfrac{2x+1}{x}$

comme $x > 0$ et que $2x + 1 > 0$,

alors $\forall x > 0$, $h'(x) > 0$.

Conclusion : h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur le même intervalle (car dérivable). Donc par le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left]\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) \, ; \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)\right[$

Or, comme $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, alors $h(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

et de la même façon, on a $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, on peut donc conclure :

$\boxed{\exists ! \, \alpha > 0 \text{ tel que } h(\alpha) = 0}$.

De plus on a $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - 1$

$= -\ln(2) < 0$

et $h(1) = \ln(1) + 2 - 1$

$= 2 - 1$

$= 1 > 0$.

Ainsi, on a $h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1)$.

Par stricte croissance de h sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc conclure que $\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$.

c) $x \mapsto 2 - \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car polynomiale

$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $x \mapsto \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions.

et comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \in \mathbb{R}$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée bien définie de telles fonctions.

Soit $x > 0$, $g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$=\left(\frac{1}{x^2}\ln(x)+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)g(x)$$

$$=\cancel{\frac{1}{x^2}(\ln(x)+2-1}$$

$$=\left(\frac{1}{x^2}(\ln(x)+2x-1)\right)g(x)$$

$$=\frac{1}{x^2}h(x)\,g(x).$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}}: \forall x>0,\ g'(x)=\frac{1}{x^2}h(x)g(x)}$.

d) On sait déjà que comme $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0,\ g(x)>0$ $\forall x>0$.

et de même, $\frac{1}{x^2}>0$.

Le signe de $g'(x)$ va donc dépendre de $h(x)$.
D'après la 2.b, h est strictement croissante et s'annule en α.

Donc $\forall x<\alpha,\ h(x)<0$
$\forall x\geq\alpha,\ h(x)\geq 0$.

On en déduit que $\forall x<\alpha,\ g'(x)<0$ et $\forall x\geq\alpha,$ $g'(x)\geq 0$.

<u>Conclusion</u>: g est décroissante sur $]0;\alpha[$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

<u>Partie II</u>

4) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)$: " u_n existe et $u_n>0$ ".

Numéro d'inscription 506[redacted]

Né(e) le 25/10/2001

Signature

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

19.16 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/07

Numéro de table 004

<u>Initialisation</u> : montrons $P(0)$: " u_0 existe et $u_0 > 0$ ".
D'après l'énoncé, u_0 existe et $u_0 > 0$.
D'où $P(0)$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$: " u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$ ".
Par hypothèse de récurrence, u_n existe donc u_n est bien défini, donc $g(u_n)$ existe également. Donc u_{n+1} existe.
De plus, $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence.
et comme $\forall x > 0$, $g(x) > 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$),
alors $g(u_n) > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$.
D'où $P(n+1)$.

<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence et $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

~~6. a) $\forall x > 0$, soit $u(x) = (x-1)\ln(x)$.~~
~~u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions (polynomiale et $\ln$).~~
~~$\forall x > 0$, $u'(x) = \ln(x) + \dfrac{x-1}{x}$~~

~~$= \dfrac{x\ln(x) + x - 1}{x}$~~

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.16 / 20

$\forall x > 0$, soit $s(x) = x\ln(x) + x - 1$, avec s dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0$, $s'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + 1$

$= \ln(x) + 2$.

$s'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 2 \geq 0$

$\iff \ln(x) \geq -2$

$\iff x \geq e^{-2}$ (par croissance de exp sur $\mathbb{R}_+^*$)

Donc $\forall x \in]0, e^{-2}[$, $s'(x) < 0$

$\forall x \geq e^{-2}$, $s'(x) \geq 0$.

Donc s est décroissante sur $]0; e^{-2}[$ et croissante sur $[e^{-2}; +\infty[$.

Soit $x > 0$, $(x-1) \geq 0$

$\iff x \geq 1$

et $\ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\forall x \in]0; 1[$, $(x-1)\ln(x) \geq 0$

car $(x-1) < 0$ et $\ln(x) < 0$.

et $\cancel{x-1}$ $\forall x \geq 1$, $x-1 \geq 0$ et $\ln(x) \geq 0$.

D'où $(x-1)\ln(x) \geq 0$.

$\boxed{\text{Conclusion: } \forall x > 0, (x-1)\ln(x) \geq 0}$.

c) Soit $x > 0$.

On sait que $\frac{g(x)}{x} \geq 1$

donc $g(x) \geq x$.

.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

Or, d'après ce qui précède, $\forall x > 0$, $g(x) \geq x$ et comme $u_n > 0$ alors $g(u_n) - u_n \geq 0$

d'où $g(u_n) \geq u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, ~~g~~ $u_{n+1} \geq u_n$.

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

8.a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$:

" $u_n \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ "

Initialisation : Montrons $P(0)$: " $u_0 \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ ".

D'après l'hypothèse de l'énoncé, $P(0)$ est bien vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$: " $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ "..

Par hypothèse de récurrence, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

donc $1 < \frac{1}{u_n} < 2$

donc $-2 < -\frac{1}{u_n} < -1$

donc $0 < 2 - \frac{1}{u_n} < 1$

8) (u_n) est croissante (question 7) et majorée par 1.
Donc par le théorème de la limite monotone,
$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

9.a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$:
" $u_n > 1$ ".
Initialisation : montrons $P(0)$: " $u_0 > 1$ ".
D'après l'hypothèse de l'énoncé on a bien $P(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre
$P(n+1)$: " $u_{n+1} > 1$ ".
Par hypothèse de récurrence $u_n > 1$.
Donc par stricte croissance de g sur $[1; +\infty[$,
$u_{n+1} > g(1) = e^0 = 1$
D'où $P(n+1)$.
Conclusion : Par le principe de récurrence et $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_n > 1$.

b) Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie qu'on note l.

Numéro d'inscription 506

Né(e) le 25/10/2001

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

19.16 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/07

Numéro de table 004

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Donc par continuité de g et par unicité de la limite, $g(\ell) = \ell$.

Or, d'après la 6.c, $g(\ell) = \ell$ admet 1 pour unique solution. Mais d'après la 9.a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Absurde. (u_n) ne peut avoir 1 comme limite.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

10) Si (u_n) était convergente, on aurait (u_n) croissante et majorée ou décroissante et minorée.

Or, si $0 < u_0 < \frac{1}{2}$, on pourrait aussi supposer que $0 < u_n < \frac{1}{2}$. Par la décroissance de g sur $]0;1/2[$ donne : $g(u_n) > 1$. c'est à dire $u_{n+1} > 1$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.16 / 20

Ainsi, si (u_n) convergeait, on aurait $g(\ell) = \ell$.
par unicité de la limite. Or, $g(\ell) > 1$ d'après
ce qui précède donc (u_n) ne peut avoir de limite finie.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : (u_n) \text{ ne converge pas}}$.

Partie III

11) $(x,y) \mapsto y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (polynomiale)
$(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (polynomiale)

$(x,y) \mapsto \ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme composée
bien définie de telles fonctions.

12) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\partial_1 f(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} \ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \right) f(x,y)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \right) f(x,y)$$

$$= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y)$$

$$\partial_2 f(x,y) = \ln(x) \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$$

$$= \ln(x) f(x,y)$$

13) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\ln(x) + xy - 1) f(x,y) = 0 & \text{car } x^2 > 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 & \text{car } \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ \ln(x) = 0 & f(x,y) > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 1 \text{ (Bijection de exp sur } \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion:}} \text{ l'unique point critique de } f \text{ est } (1,1)}$

14) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\partial_{1,1} f(x,y) = \frac{\left(\frac{1}{x} + y\right) x^2 - 2x(\ln(x) + xy - 1)}{x^4} f(x,y)$$

$$+ \left(\frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2}\right) \times \partial_1 f(x,y)$$

$$\partial_{1,2} f(x,y) = \frac{1}{x} f(x,y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_2 f(x,y)$$

$$= \frac{1}{x} f(x,y) + \frac{(\ln(x) + xy - 1)\ln(x) f(x,y)}{x^2}$$

$$\partial_{2,1} f(x,y) = \frac{1}{x} f(x,y) + \ln(x)\, \partial_1 f(x,y)$$

$$= \frac{1}{x} f(x,y) + \ln(x) f(x,y) \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2}$$

(théorème de Schwartz vérifié).

et $\partial_{2,2} f(x,y) = \ln(x)\, \partial_2 f(x,y)$
$$= \ln(x)^2 f(x,y)$$

Ainsi, $\partial_{1,1} f(1,1) = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \times 1 - \frac{2(\ln(1) + 1 - 1)}{1} f(1,1)$
$$+ \frac{\ln(1) + 1 - 1}{1} \partial_2 f(1,1)$$
$$= 2 + 0$$
$$= 2$$

$\partial_{1,2} f(1,1) = \partial_{2,1} f(1,1)$
$$= f(1,1) + (\ln(1) + 1 - 1) \times \ln(1) \times f(1,1)$$
$$= 1 + 0$$
$$= 1$$

et $\partial_{2,2} f(x,y) = \ln(1)^2 f(1,1)$
$$= 0$$

$$\boxed{\text{Conclusion : La matrice de } f \text{ en } (1,1) \text{ est } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

15) On détermine les valeurs propres de $\nabla^2 f(1,1)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f(1,1) - \lambda I$ n'est pas inversible

$\iff (2-\lambda) \times (-\lambda) - 1 = 0$

$\iff -2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

On calcule Δ le discriminant de $\lambda \mapsto \lambda^2 - 2\lambda - 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$
$$= 4 - 4 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0 \text{ donc l'équation}$$

Numéro d'inscription 566

Né(e) le 25/10/2001

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

19.16 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 004

admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2

$$\lambda_1 = \frac{4-\sqrt{8}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{4+\sqrt{8}}{2}$$

On sait que $\lambda_2 > 0$.

De plus, $4 < 8 < 9$ donc par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, $2 < \sqrt{8} < 3$

donc $-3 < -\sqrt{8} < -2$

donc $1 < 4-\sqrt{8} < 2$

et en divisant par $2>0$ on trouve $\lambda_1 > 0$.

Donc $Sp(\nabla^2 f(1,1)) = \{\lambda_1 ; \lambda_2\}$.

Or, on a $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Conclusion : f n'admet pas d'extremum local en $(1,1)$.

16) Si f admet un extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, c'est forcément en un point critique.

Or, f n'admet aucun extremum local en son unique point critique $(1,1)$. Donc f ne peut avoir d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.16 / 20

Exercice 3

Partie I

1.a) X_n, Y_n et Z_n compte le nombre de succès (déposer un jeton dans l'urne 1, 2 ou 3) lors de n variables de Bernoulli identiques, indépendantes et de même probabilité $\frac{1}{3}$ (équiprobabilité).

Donc X_n, Y_n, Z_n suivent la loi de Bernoulli de paramètres $\mathcal{B}(n, 1/3)$.

b) $P(X_n=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{n-0}$

$= \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$P(X_n=n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-n}$

$= \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

c) $(Y_n=0) \cap (Z_n=0)$ signifie qu'il y a aucun jeton dans l'urne 2 et 3 après avoir déposé n jetons. Cela signifie que tous les n jetons sont dans l'urne

1.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion :}}\ (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)}$

d) $V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)$

e) Par la formule du crible,

$$
\begin{aligned}
P(V_n) &= P((X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)) \\
&= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) \\
&\quad - P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)) - P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) \\
&\quad + P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0) \cap (Y_n = 0)) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - P(Z_n = n) - P(Y_n = n) - P(X_n = n) \\
&\quad + 0 \quad (\text{car } P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0) \cap (Y_n = 0)) = 0) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{1.b et } X_n, Y_n \text{ et } Z_n \text{ suivent la même loi})
\end{aligned}
$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion :}}\ P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

2) $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ car si une urne est vide après avoir déposé 1 jeton, il faut qu'elle le reste après avoir déposé les autres jetons.

De plus, $V_{n+1} \subset V_n$ car si une urne est vide après avoir placé $(n+1)$ jetons, elle l'était aussi après avoir déposé le n-ème jeton.

Donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements.

Donc d'après le théorème de la limite monotone,

$P(V) = \lim_{n \to +\infty} P(V_n)$

$= \lim_{n \to +\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

et comme $\frac{2}{3} \in]0;1[$ et que $\frac{1}{3} \in]0;1[$.

alors $3\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $3\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

D'où $P(V_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\boxed{\text{Conclusion : } P(V) = 0}$

4) "Au mieux", on place les trois premiers jetons dans les trois urnes.

"Au pire", il faut une infinité de lancers pour qu'une urne ne soit plus vide. Et toutes les valeurs ~~Conclusion :~~ intermédiaires sont comprises.

$\boxed{\text{Conclusion : } T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![}$

5) Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$ $P(V_{n-1}) - P(V_n)$ est la probabilité qu'une urne soit vide après le départ de $(n-1)$ jetons mais qu'elle ne soit plus après celui de n jetons, ce qui correspond à la probabilité de $(T=n)$.

Conclusion : $\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $P(T_n = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$

6) Par le théorème de transfert sous réserve d'existence :

$$E(T) = \sum_{n=3}^{+\infty} n\, P(T_n = n)$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(P(V_{n-1}) - P(V_n)\right)$$

Numéro d'inscription 506[redacted]

Né(e) le 25/10/2001

Signature

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

19.16 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/07

Numéro de table 004

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} n P(V_{n-1}) - \sum_{n=3}^{+\infty} n P(V_n)$$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} (j+1) P(V_j) - \sum_{n=3}^{+\infty} n P(V_n) \qquad (j = n-1)$$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} j P(V_j) + \sum_{j=2}^{+\infty} P(V_j) - \sum_{n=3}^{+\infty} n P(V_n)$$

$$= 2P(V_2) + \sum_{j=2}^{+\infty} P(V_j) + \sum_{j=3}^{+\infty} j P(V_j) - \sum_{n=3}^{+\infty} n P(V_n)$$

$$= 2P(V_2) + \sum_{j=2}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^j - 3\left(\frac{1}{3}\right)^j$$

$$= 2P(V_2) + 3\left(\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j - \cancel{3}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j\right)$$

$$= 2P(V_2) + 3\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} - \frac{1}{9}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-2}\right)$$

$$= 2P(V_2) + 3\left(\frac{4}{9}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= 2\left(3\times\frac{4}{9} - 3\times\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{4}{9}\times 3 - \frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)+3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)$$

$$= 6\times\frac{1}{3} + \cancel{3}\ 4 - \frac{3}{6}$$

$$= 2 + 4 - \frac{1}{2}$$

$$= 6 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{11}{2}$$

$\boxed{\text{\underline{Conclusion :} } T \text{ admet une espérance et } E(T) = \frac{11}{2}}$

7.a) X_2 est le nombre de jetons présents dans l'urne 1 après avoir réparti les deux premiers jetons.

$$X_2(\Omega) = \{0;1;2\}$$

et $W_2(\Omega) = \cancel{\{0;1;2;3\}}\ .\ \{1;2\}$.

$$\cancel{P((W_2=1)\cap(X_2=0)) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}}$$

$$\cancel{P((W_2=1)\cap(X_2=1)) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}}$$

$$\cancel{P((W_2=1)\cap(X_2=2)) = 0}$$

$$\cancel{P((W_2=2)\cap(X_2=0)) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}}$$

$P((W_2 = 2)\cap(X_2 = 1)) = 0$

$P((W_2 = 2)\cap(X_2 = 2)) = \frac{1}{9}$

B) $P(W_2 = 1) = P((W_2 = 1)\cap(X_2 = 0)) + P((W_2 = 1)\cap(X_2 = 1)) + P((W_2 = 1)\cap(X_2 = 2))$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0$

$= \frac{2}{9}$

$P(W_2 = 2) = P((W_2 = 2)\cap(X_2 = 0)) + P((W_2 = 2)\cap(X_2 = 1)) + P((W_2 = 2)\cap(X_2 = 2))$

$= \frac{2}{9}$

$P((X_2 = 0)\cap(W_2 = 1)) = P(X_2 = 0)\, P_{(X_2 = 0)}(W_2 = 1)$

$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{9}$

$P((X_2 = 1)\cap(W_2 = 1)) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{2}{9}$

$P((X_2 = 2)\cap(W_2 = 1)) = 0$

$P((X_2 = 0)\cap(W_2 = 2)) = P(X_2 = 0)\, P_{X_2 = 0}(W_2 = 2)$

$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{9}$

$P((X_2 = 1)\cap(W_2 = 2)) = P(X_2 = 1)\, P_{(X_2 = 1)}(W_2 = 2)$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 0$

$P((X_2=2) \cap (W_2=2)) = P(X_2=2)\, P_{(X_2=2)}(W_2=2)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 1$$

$$= \frac{1}{9}$$

<u>Exercice 1</u>

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \mathrm{Vect}(I, X_1)$, avec $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(I, X_1) est libre car les vecteurs sont non colinéaires, et est génératrice de F qui est donc un sous-espace vectoriel.
Donc c'est une base de F et $\dim(F) = 2$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Numéro d'inscription 506

Né(e) le 25/10/2001

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

Signature

19.16 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 004

$M^2 = M$

$\cancel{\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}$

$\cancel{\iff \Big(a^2 + bd + cg \quad ab + be + ch \quad ac + bf + ci}$

On voit que $I \in G$ car $I^2 = I$.

Or, $(2I)^2 = 4I^2 = 4I \neq 2I$.

Conclusion : G n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

3.a) On voit directement que $A \in F$ en posant $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{-1}{3}$

De plus, $A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

19.16 / 20

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{9}} \times \cancel{3} \begin{pmatrix} \cancel{2} & 1/3 & \cancel{1/3} \\ \cancel{1/3} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \times 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$= A$. Donc $A \in F$.

Donc $A \in F \cap G$.

b) $A^2 = A$ donc un polynome annulateur de A est le polynome $P(X) = X^2 - X$.

c) $P(X) = 0 \Leftrightarrow X^2 - X = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{X(X^2 - I)}\ X(X-1) = 0$

$\Leftrightarrow X = 0$ ou $X = 1$.

Donc $Sp(A) \subset \{0; 1\}$.

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

après avoir échelonné la matrice A, on trouve $rg(A) = 2$ et comme A est carrée de taille 3, alors A n'est pas inversible.

Donc 0 est valeur propre.

$$A - I = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Toutes les lignes sont identiques on conclut directement que $A - I$ n'est pas inversible.

Donc $Sp(A) = \{0; 1\}$.

<u>Sous-espaces propres :</u>

<u>Pour 0 :</u>

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2/3\, x - 1/3\, y - 1/3\, z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2/3\, x - 2/3\, y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

D'où $E_0(A) = \text{Vect}(u_1)$, avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

où (u_1) est libre car constitué d'un unique vecteur non nul. Donc c'est une base de $E_0(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 1$.

Pour 1 :

$AX = X$

$\Leftrightarrow -1/3\, x - 1/3\, y - 1/3\, z = 0$

$\Leftrightarrow -1/3\,(x + y + z) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z = 0$

$\Leftrightarrow z = -x - y$

D'où $E_1(A) = \text{Vect}(u_2, u_3)$, avec $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

où (u_2, u_3) est libre car vecteurs non colinéaires. Donc c'est une base de $E_1(A)$ et $\dim(E_1(A)) = 2$.

Numéro d'inscription 506

Né(e) le 25 / 10 / 2001

Signature

Nom PETITEAU

Prénom (s) RAYAN MEHDI

19.16 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 004

d) A n'est pas inversible car 0 est valeur propre.
A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3 et A est carrée de taille 3.

4.a) $M \in G$

$$\iff M^2 = M$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b^2+2ab = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b^2+2ab - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.16 / 20

b) ~~5~~ $\Pi 6 G C \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \text{ ou } b + 2a - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \text{ ou } b + 2a - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ b = 0 \text{ ou } b = -1 \end{cases}$

- - -

5) ~~Libre~~ famille libre + 2 éléments appartenant à F