Une semaine, un classique #18

D'après EML 2010 (ECS)

Difficulté : (**)

• On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1,...,p\}, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Autrement dit, une matrice est dite stochastique si chaque élément de la matrice est un réel positif et si la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

1) **a.** On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2) Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

3) Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

On note i un élément de $\{1,...,p\}$ tel que : $\forall k \in \{1,...,p\}, \ |x_k| \leqslant |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.

b. En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.

4) Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = \mathrm{I}_p$.

a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.