Copie anonyme - n°anonymat : 718602

D2-00169 718602 Maths E

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 24 **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1. • φ est une application.
• Vérifions qu'elle est linéaire :
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on $\varphi(\lambda A+B) = \lambda\varphi(A)+\varphi(B)$?

$$\varphi(\lambda A+B) = J(\lambda A+B) - (\lambda A+B)J = \lambda JA + JB - \lambda AJ - BJ$$
$$= \lambda(JA - AJ) + JB - BJ = \lambda\varphi(A) + \varphi(B)$$

Donc φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est donc un endomorphisme.

2. a) $\varphi(K_1) = JK_1 - K_1J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(K_1) = K_3 - K_2$$

$\varphi(K_2) = JK_2 - K_2J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K_4 - K_1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\varphi(K_3) = JK_3 - K_3J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = K_1 - K_4$$

$$\varphi(K_4) = JK_4 - K_4J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = K_2 - K_3$$

b) A est construite de la manière suivante : les lignes sont en fonction des éléments de la base (K_1, K_2, K_3, K_4) et les colonnes sont en fonction de leur image à travers la fonction φ qui peuvent s'écrire sous forme de combinaison linéaire des éléments de la base.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(K_1) & \varphi(K_2) & \varphi(K_3) & \varphi(K_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \end{array}$$

c) A est symétrique donc diagonalisable.

3. a) On remarque que : $\varphi(K_1) = -\varphi(K_4)$
$\varphi(K_2) = -\varphi(K_3)$

donc $rg(A) = 2$ car $\varphi(K_1)$ et $\varphi(K_2)$ ne sont pas colinéaires.

D'après le cours : $Im(\varphi) = Vect((\varphi(K_1), \varphi(K_2), \varphi(K_3), \varphi(K_4))$

or, $\dim Im(\varphi) = rg(A)$ et $\varphi(K_1) = -\varphi(K_4)$
$\varphi(K_2) = -\varphi(K_3)$

Donc $\dim Im(\varphi) = 2$.

Finalement : $\boxed{Im(\varphi) = Vect((\varphi(K_1), \varphi(K_2))}$

$\varphi(K_1)$ et $\varphi(K_2)$ ne sont pas colinéaires, de plus ils sont ~~ps~~ ils sont libres de $Im(\varphi)$. générateurs donc la famille $(\varphi(K_1), \varphi(K_2))$ est une base de $Im(\varphi)$.

b) Nous travaillons dans des espaces à dimensions finies.
D'après le théorème du rang :
$\dim(Ker(\varphi)) + \dim Im(\varphi) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
$\Leftrightarrow \dim(Ker(\varphi)) + 2 = 4$
$\Leftrightarrow \boxed{\dim(Ker(\varphi)) = 2}$

~~J n'est pas inversible car ses colonnes sont proportionnelles, donc 0 est une valeur propre de J~~

~~Déterminons une base de Ker (φ)~~
~~Ker (φ) = { M ∈ M₂(R), φ(M) = 0₂ }~~

~~Soit X = (x y ; z t) et M = (a b ; c d)~~

~~Soit I = (1 0 ; 0 1), M = (a b ; c d)~~

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(I) = JI - IJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = O_2$ donc $I \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\varphi(J) = JJ - JJ = J^2 - J^2 = O_2$ donc $J \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

I et J ne sont pas colinéaires, ils sont donc libres de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
De plus, I et J sont deux éléments et $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 2$.
Donc (I, J) forme une famille libre maximale de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Donc : $\boxed{(I, J) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi)}$

4-a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4A$

Copie anonyme - n°anonymat : 718602

Donc $A^3 = 4A \iff A^3 - 4A = 0$.

b) $A^3 - 4A = 0$ donc $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de φ.

$X^3 - 4X = 0 \iff X(X^2 - 4) = 0$

$\iff X = 0$ ou $X^2 - 4 = 0$
$\iff X^2 = 4$
$\iff X = 2$ ou $X = -2$

Donc les valeurs propres potentielles de φ sont : $\{-2, 0, 2\}$.

5. Nous remarquons que r_1 montre le rang de la matrice : $A - 2I$ et r_2 montre le rang de : $A + 2I$

Cette matrice appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Or, Scilab renvoi que le rang des deux matrices sont égal à 3.

Donc $A+2I$ et $A-2I$ ne sont pas inversibles.
On peut conjecturer que $\{2, -2\}$ sont bien des valeurs propres de A.
De plus, la somme de leur dimensions est de 6. Or, comme A est diagonalisable d'après 2.c), la somme des dimensions des sous espaces propres doit être égale à la dimension de $\mathbb{R}^4$, d'après le théorème fort de la diagonalisation.

Ici donc, la dimension des sous espaces propres associés sera inférieure au rang de la matrice. Pour que la dimension soit égale à 4, il faut que la dimension des sous espaces propres soient égales chacun à 1 car le rang de leur matrice est de $4-1=3$.

6. a) Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $AX=-2X \iff (A+2I)X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A+2I=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $(A+2I)X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par identification : $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ -x+2y+t=0 \\ x+2z-t=0 \\ y-z+2t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y+2t-y+z=0 \\ x=2y+t \\ 2y+t+2z-t=0 \\ y-z+2t=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0z=0 \\ x=2y+t \\ y=-z \\ t=z \end{cases} \iff \begin{cases} t=z \\ y=-z \\ x=-z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$

$AX=2X \iff (A-2I)X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'après le même procédé, par identification :

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x + y \\ t = x + 2y \\ x - 4x - 2y - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 2x + y \\ t = x + 2y \\ -3x - 2y - x - 2y = 0 \\ y - 2x - y - 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x + y \\ t = x + 2y \\ -4x - 4y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 2x + y \\ t = x + 2y \\ x = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ t = y \\ x = -y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) Nous savons que A est diagonalisable donc la somme des dimensions des sous espaces propres de φ est 4.

$Sp(\varphi) = \{-2 ; 0, 2\}$ et d'après la question précédente :

$E_{-2} = \{z(-1,-1,1,1),\ z \in \mathbb{R}\}$. $(-1,-1,1,1) \neq (0,0,0,0)$ donc la famille est libre de E_{-2}.

De plus elle est génératrice donc c'est une base de E_{-2}. $\dim(E_{-2}) = 1$

$$\boxed{E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\left(-1,-1,1,1\right)\right)}$$

$E_2 = \{y(-1,1,-1,1),\ y \in \mathbb{R}\}$ $(-1,1,-1,1) \neq (0,0,0,0)$ donc la famille est libre de E_2.

De plus elle est génératrice de E_2, c'est donc une base de E_2.

$$\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\left(-1,1,-1,1\right)\right)}$$

$\boxed{E_0 = Ker(\varphi) = Vect(1, J)}$ d'après 3.b).

Exercice 2:

1.
```
p = input("entrez la valeur de p dans ]0;1[:")
n = input('entrez la valeur de n:')
X = 0
while   X <= n  &  rand() <= p
    X = X+1
end
disp(X, 'le niveau du joueur est:')
```

2. a) le joueur a une probabilité p de réussir un niveau et il a le niveau k si et seulement si il a réussi le niveau k.
Donc si le joueur échoue au niveau 1, il n'a pas le niveau 1 mais le niveau 0.
De même, si le joueur réussi tous les niveaux y compris le niveau n, le jeu s'arrête.
Donc le joueur prend au minimum le niveau 0 et au maximum le niveau n.
Il peut également échouer aux niveaux situés entre 0 et n.
X_n est la variable situant le niveau du joueur.
Finalement : $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]}$

b) $(X_n = 0)$: le joueur échoue au niveau 1.

$P(X_n = 0) = 1 - p = q$ car la probabilité d'accéder au niveau 1 est p.

c) $(X_n = n)$: le joueur réussi tous les niveaux y compris le n^e.

$(X_n = n) = \bigcap_{k=1}^{n} R_k$ avec R_k : "le joueur réussi le k^e niveau".

Par passage à la probabilité : $(R_k, \overline{R_k})$ forme un système complet d'évènement, d'après la formule des probabilités composées :

~~$P(X_n = n)$~~

$$P(X_n=n) = P(X_n=1) \times P_{(X_n=1)}(X_n=2) \times P_{(X_n=1)\cap(X_n=2)}(X_n=3) \times \dots \times P_{\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_n=k)}(X_n=n)$$

$$= p \times p \times \dots \times p$$

soit $(X_n = k) = R_k$

$$= p^n$$

Donc $\boxed{P(X_n=n) = p^n}$

d) $(X_n = k)$: le joueur réussi le k^e niveau mais échoue au $(k+1)^e$.

$$(X_n = k) = \bigcap_{i=1}^{k} R_i \cap \overline{R_{k+1}} \quad , \forall k \in [\![1, n-1]\!]$$

$(R_k, \overline{R_k})$ forme un système complet d'évènement.

~~$P(X_n=k) = P(X_n=1) \times P_{(X_n=1)}(X_n=2) \times \dots$~~

$$P(X_n=k) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \dots \times P_{\bigcap_{i=1}^{k-1} R_i}(R_k) \times P_{\bigcap_{i=1}^{k} R_i}(\overline{R_{k+1}})$$

$$= p \times p \times p \times \dots \times p \times q$$

$= p^k q$

Donc $P(X_n = k) = p^k q$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$.

Pour $k=0$, $P(X_n = 0) = p^0 q = q$. D'après 2.b), l'expression reste valable pour $k=0$.

3. $\cancel{\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} p^k q = q \sum_{k=0}^{n} p^k}$

$\cancel{= q \times \frac{1-p^n}{}}$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} p^k q + p^n$$

$$= q \sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n$$

$$= q \times \frac{1-p^n}{1-p} + p^n$$

$$= 1 - p^n + p^n \quad \text{car } q = 1-p$$

$$\boxed{= 1.}$$

4. a) X_n est une variable aléatoire discrète finie donc elle admet une espérance.

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k q p^k + n p^n$$

$$= q \sum_{k=0}^{n-1} k p^k + n p^n = (1-p) \sum_{k=0}^{n} k p^k.$$

Donc $\boxed{E(X_n) = (1-p) \sum_{k=0}^{n} k p^k.}$

b) En faisant tendre n vers $+\infty$:

$$E(X_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} kp^k\right)(1-p)$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = (1-p)\sum_{k\geq 0} kp^k$

or $\sum_{k\geq 1} kp^{k-1}$ est une série géométrique dérivée première, qui converge car $p \in]0;1[\subset]-1;1[$.

$$(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = (1-p)p\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = qp \times \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$= qp \times \frac{1}{q^2} = \frac{p}{q}.$$

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{p}{1-p}}$

5. a) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k+1$, $(X_n = k)$: le joueur réussit le k^e niveau et échoue au $(k+1)^e$. Comme $n \geq k+1$, le joueur ne peut pas finir le jeu en réussissant tous les niveaux. Le n n'est donc pas une contrainte. En utilisant la même démarche que dans la question 2. d), on retrouve le même résultat.

$$\boxed{P(X_n = k) = p^k q \quad , \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k+1.}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, quand $n \to +\infty$, $\lim P(X_n = k) = p^k q$.

Soit X suivant une loi tel que $P(X=k) = p^k q$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X$. Ici, $\boxed{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$

c) Posons $Y = X+1$

$$P(Y=k) = P(X+1=k) = P(X=k-1) = p^{k-1}q \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nous remarquons que $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$

$$E(Y) = \frac{1}{q} \qquad \text{or, } Y = X+1 \Leftrightarrow X = Y-1$$

$E(X) = E(Y) - 1$ par linéarité de l'espérance.

$$= \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q} = \lim_{n \to +\infty} E(X_n).$$

Donc $\boxed{E(X) = \lim_{n \to +\infty} E(X_n)}$

Exercice 3 :

1. $\forall n \geq 1, \ \forall x \in [0;1], \ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$

- f_n est dérivable sur $[0;1]$.
- $f_n'(x) = \dfrac{(x+n) - n}{(x+n)^2} = \dfrac{x}{(x+n)^2} \geq 0$ car $x \in [0;1]$. $(x+n)^2 \geq 0$.

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{1+n}$

$$f_n(0) = 0 \qquad f_n(1) = \frac{1}{1+n}.$$

2. $\forall n \geq 1, \ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx$

Copie anonyme - n°anonymat : 718602

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 24	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x \leq 1$ car $x \in [0;1]$.

$\Leftrightarrow 0 \leq x+n \leq n+1$

$\Leftrightarrow 0 \leq n(x+n) \leq n(n+1)$

$\Leftrightarrow 0 \geq \dfrac{1}{n(x+n)} \geq \dfrac{1}{n(n+1)}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{x}{n(x+n)} \leq \dfrac{x}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ car $x \leq 1$.

Par croissance de l'intégrale, les bornes étants dans l'ordre :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

or $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2+n} \geq \dfrac{1}{n^2} \geq 0$. Et la série de terme $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'ordre 2 qui est donc convergente.

avec $2 > 1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par comparaison : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Par comparaison encore : $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge.}}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a) S_n est une suite finie, elle est donc nécéssairement convergente.
En faisant tendre n vers plus l'infini, nous retrouvons le résultat de la question précédente.
Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons γ sa limite.

b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

On sait d'après 2. que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$

Or, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ par somme télescopique.

Or, $1 - \frac{1}{n} \leq 1$ car $n \geq 1$. et $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc $0 \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$ par passage à la limite.

c) $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} U_k - \sum_{k=1}^{n} U_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$= U_{n+1} \geq 0$ car $U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ d'après 2.

Donc $S_{n+1} \geq S_n$, Ainsi, $\boxed{(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

5. a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $x \in [0;1]$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Cherchons a et b tel que :

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}.$$

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} \iff \frac{x}{k(x+k)} = \frac{(x+k)a - kb}{k(x+k)}$$

$\iff x = k(a-b) + xa.$

Par identification : $\begin{cases} a-b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1. \end{cases}$

Donc $\boxed{a=1, \ b=1.}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, U_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{k} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k} dx$ par linéarité.

$= \frac{1}{k} - \left[\ln|x+k|\right]_0^1 = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k.$

Finalement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ U_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k.}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$

5. b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k$

$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)}$ par somme télescopique car $\ln(1) = 0$.

6. Soit, $\forall n \geq 1$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

D'après 4. a), S_n converge et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ d'après 5.b)

Donc $T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln n$

or, $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Et $\frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$ donc $\ln(n+1) - \ln n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors $T_n \underset{+\infty}{\sim} S_n$

Par le critère d'équivalence, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a la même limite que S_n. Donc T_n converge vers γ.

b) On sait que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq \frac{1}{n}$

Copie anonyme - n°anonymat : 718602

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) S_n est croissante et converge vers γ
T_n est décroissante et converge vers γ.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \gamma \leq T_n.}$

7. a) Quand $T_n - S_n \leq 10^{-3}$, S_n représente la valeur rapprochée de γ.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1)$

$= \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

```
n=1
s= 1- log(2)
while s >= 10^-3
  n = n+1
  s = s + log( n+1 / n)
  end
disp (n).
```

Problème :

Partie 1 : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

1. a) $\forall x \in]0;1[$, $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est continue

Si $x = 0$, $x^p(1-x)^q = 0$ donc est définie et $x^p(1-x)^q \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Si $x = 1$, $x^p(1-x)^q = 0$ et $x^p(1-x)^q \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

Donc $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 x^p(1-x)^q \, dx$ est bien définie.

b) $u'(x) = x^p$ $\qquad v(x) = (1-x)^q$

$u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ $\qquad v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \times (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \times \left(-q(1-x)^{q-1}\right) dx.$$

$$= q \times \frac{1}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} \, dx$$

$$\boxed{I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1), \ \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.}$$

2. a) $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} \, dx = \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1$

$= \boxed{\frac{1}{p+q+1}}$.

Donc $\boxed{I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$.

b) $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = I(p,p) = \frac{p!\,p!}{(p+p+1)!} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

$$b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n (1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

3. • $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n > 0$

• $x \mapsto x^n(1-x)^n \geq 0$, $\forall x \in [0;1]$.

• $x \mapsto 0$ est nul , $\forall x \notin [0;1]$.

Donc b_n est soit positive, soit nulle sur $\mathbb{R}$.

• $x \mapsto \alpha_n x^n(1-x)^n$ est continue sur $]0;1[$ en tant qu'opérations de fonctions continues sur $]0;1[$.

• $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ en tant que constante.

Donc b_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

• Analysons la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\,dx$:

• $\int_{-\infty}^{0} b_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty} b_n(x)\,dx = 0$ car b_n est nulle sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

• $\int_0^1 b_n(x)\,dx = \int_0^1 \alpha_n x^n(1-x)^n\,dx = \alpha_n \int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$

$= \alpha_n I(n,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1$.

Donc par la relation de Chasles : $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\,dx$ converge et vaut 1
(les intégrales convergent).

Finalement, $\boxed{b_n \text{ est une densité.}}$

4. X_0 admet b_0 comme densité :

$$b_0 = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{or } \alpha_0 = \frac{0!}{0!} = 1.$$

$$\text{Donc } b_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$ qui est la densité d'une loi uniforme.

Nous remarquons ici que $\boxed{X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1]).}$

5-a) Analysons la convergence absolue de : $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\,dx$.

$\int_{-\infty}^{0} x b_n(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} x b_n(x)\,dx = 0$ car b_n est nulle sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

$$\int_0^1 x b_n(x)\,dx = \int_0^1 \alpha_n x^{n+1}(1-x)^n\,dx = \alpha_n \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\,dx.$$

$= \alpha_n I(n+1,n) = \alpha_n I(n+1+n, 0)^{*}$ d'après la partie 1.

$^{*} \times \frac{p!\,q!}{(p+q)!}$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!\,n!}{(2n+1)!} I(2n+1,0)$$

$$= (n!)^{-1}(n+1)!\; I(2n+1,0)$$

$$= (n!)^{-1}(n+1)!\; \frac{1}{(n+1)+n+1}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n!}{n!} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 718602

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\,dx$ converge et par la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Finalement : $\boxed{X_n \text{ possède une espérance et } E(X_n) = \frac{1}{2}.}$

b) Analysons la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 b_n(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 b_n(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} x^2 b_n(x)\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{1} x^2 b_n(x)\,dx = \int_0^1 \alpha_n x^{n+2}(1-x)^n\,dx$$

$$= \alpha_n \int_0^1 x^{n+2}(1-x)^n\,dx$$

$$= \alpha_n I(n+2, n)$$

$$= \alpha_n \frac{(n+2)!\,n!}{(2n+2)!} I(2n+2, 0) \quad \text{d'après la partie 1.}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!\,n!}{(2n+2)!} I(2n+2, 0)$$

$$= \frac{(n+2)!}{n!(n+2)} \times \frac{1}{n+2+n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{1}{2n+3} = (n+1) \times \frac{1}{2(n+1)+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= \dfrac{n+1}{2n+3}$. donc $E(X_n^2) = \dfrac{n+1}{2n+3}$ par la relation de Chasles.

X_n admet un moment d'ordre 2.

$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$ d'après Koenig-Huygens.

$\cancel{= \dfrac{n+1}{2n+3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4-n+2}{4(n+2)}}$

$\cancel{V(X_n) = }$

~~c) On sait que~~ $\cancel{E(X_n) = \dfrac{1}{2}}$ ~~et~~ $\cancel{V(X_n) = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{4}}$

$V(X_n) = \dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4n+4-2n-3}{4(2n+3)} = \boxed{\dfrac{2n+1}{4(2n+3)}}$

c) D'après Bienaymé-Tchebychev :

$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\frac{2n+1}{4(2n+3)}}{\varepsilon^2}$

or $\dfrac{2n+1}{\varepsilon^2 4(2n+3)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0}$

Partie 3 :

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \alpha_0 \int_0^x 1\, dt = 1 \times x = x.$

7. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = \alpha_n \int_0^1 t(1-t)\, dt$

$= \alpha_n \left(\int_0^1 t\, dt - \int_0^1 t^2\, dt \right)$ par linéarité

$= \alpha_n \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \alpha_n \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \alpha_n \times \frac{1}{2} - \alpha_n \times \frac{1}{3}$

$= \alpha_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{\alpha_n}{6}}$

NON

b) Posons $u = 1-t$ avec $t \mapsto 1-t$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- $t = 0 \iff u = 1$
- $t = x \iff u = 1-x$
- $du = -dt \iff dt = -du.$
- $u = 1-t \iff t = 1-u.$

$\alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n\, dt = \alpha_n \int_1^{1-x} (1-u)^n u^n (-du)$

$= \alpha_n \int_{1-x}^1 (1-u)^n u^n\, du = f_n(1-x).$

$f_n(x) + f_n(1-x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n\, dt + \alpha_n \int_{1-x}^1 t^n (1-t)^n\, dt$

---

7. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt = 1$

d'après 3. en montrant la densité de b_n.

$= \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt = f_n(1) = 1.$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1.}$

c) Soit $x = \frac{1}{2}$, d'après la question précédente :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

8. a) $x \longmapsto x^n(1-x)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
donc f_n est dérivable en tant qu'intégrale de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \cancel{\alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n\,dt + \alpha_n\left(x^n(1-x)^n\right)}$$
$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(x^n(1-x)^n\right) = \cancel{\alpha_n\left(x^n - x^{2n}\right)}$$

b) Si n est impair : $2n+1$ est pair.

si $x < 0$, $x^n < 0$ mais $x^{2n} < 0$ également.

$f_n'(x) > 0$ si $x \notin]-1;1[$.
$f_n'(x) < 0$ si $x \in]-1;1[$.

9. a) $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n\,dt$

10. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n''(x)$ existe car f_n' est dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n''(x) = \alpha_n\left(nx^{n-1}(1-x)^n + x^n\left(-n(1-x)^{n-1}\right)\right)$$