Copie anonyme - n°anonymat : 202033

V9-00108
202033
Maths E

Code épreuve : 298
Nombre de pages : 28
Session : 2022
Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Exercice 1 :

1) Soit $(M,Q) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, $\varphi(\lambda M+Q) = J(\lambda M+Q) - (\lambda M+Q)J$
$= \lambda JM - \lambda MJ + JQ - QJ$
$= \lambda(JM - MJ) + JQ - QJ$
$= \lambda\varphi(M) + \varphi(Q)$

Donc φ est linéaire (i)

De plus $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dès lors $JM - MJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Ainsi, φ est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ii)

D'après (i), (ii), φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) a) $\varphi(K_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= K_3 - K_2$

$$\varphi(K_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underline{= K_4 - K_1}$$

$$\varphi(K_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underline{= K_1 - K_4}$$

$$\varphi(K_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underline{= K_2 - K_3}$$

b) On construit la matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) en exprimant $\varphi(K_1), \varphi(K_2), \varphi(K_3), \varphi(K_4)$ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4)

Dès lors :

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \varphi(K_1) & \varphi(K_2) & \varphi(K_3) & \varphi(K_4) \end{array} \end{array}$$

c) On remarque que la matrice A, qui est la representation matricielle de l'endomorphisme φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) est symétrique.

Dès lors, $\underline{\varphi \text{ est diagonalisable}}$

3) a) Soit C_i la colonne i de A.

On remarque que $C_1 = -C_4$ et que $C_2 = -C_3$

Or, C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelle.

Puisque A ne possède que 4 colonnes, alors $\underline{rg(A) = 2}$

Dès lors, puisque $rg(A) = 2$, alors $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 2$

Or, $\mathrm{Card}(\varphi(K_1), \varphi(K_2)) = 2$, $(\varphi(K_1), \varphi(K_2)) \in \mathrm{Im}(\varphi)$

et $\varphi(K_1)$ et $\varphi(K_2)$ ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre.

Dès lors, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\langle \varphi(K_1), \varphi(K_2) \rangle$
$= \underline{\mathrm{Vect}\langle K_3 - K_2, K_4 - K_1 \rangle}$

b) Dès lors, puisque φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème du rang :

$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi)$
$\iff \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 4 - 2$
$\iff \underline{\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 2}$

Or, $\varphi(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $\varphi(J) = J^2 - J^2$
$= 0$

Dès lors, $(I, J) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

Or, $\text{Card}(I,J) = \dim \text{Ker}(\varphi)$

Et I et J sont non proportionnel donc forment une famille libre.

Dès lors, (I,J) est une base de $\text{Ker}(\varphi)$

4) a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4A$$

Dès lors, $A^3 - 4A = 0$

b) Soit $P(X) = X^3 - 4X$

Dès lors, P est un polynome annulateur de A tel que $P(A) = 0$

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont les valeurs qui sont solutions de $P(X) = 0$

$$\begin{aligned} P(X) = 0 &\iff X^3 - 4X = 0 \\ &\iff X(X^2 - 4) = 0 \\ &\iff X = 0 \text{ ou } X^2 = 4 \\ &\iff X = 0 \text{ ou } X = 2 \text{ ou } X = -2 \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres possibles de φ sont 0, 2 et -2

Copie anonyme - n°anonymat : 202033

5) D'après le scilab, on trouve que

$Rg(A-2I)=3$ et $Rg(A+2I)=3$

Dès lors, $\dim Ker(A-2I)=4-3=1$ (d'après le théorème du rang)
et $\dim Ker(A+2I)=4-3=1$

Dès lors, on peut conjecturer que 2 et -2 sont des valeurs propres de φ et que $\dim E_{-2}(\varphi)=1$ et $\dim E_2(\varphi)=1$
(car A est la matrice représentative de φ dans la base (K_1,K_2,K_3,K_4))

6) a) $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$

Donc $AX=2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0&-1&1&0\\ -1&0&0&1\\ 1&0&0&-1\\ 0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\\ 2z\\ 2t\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -y+z\\ -x+t\\ x-t\\ y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\\ 2z\\ 2t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -y+z=2x\\ -x+t=2y\\ x-t=2z\\ y-z=2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2t=0\\ 2y+2z=0\\ -y+z=2x\\ -x+t=2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t\\ y=-z\\ -(-z)+z=2x\\ -(-t)+t=2y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -z \\ z = x \\ t = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ z = x \\ y = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Donc la solution est $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$

• $AX = -2X \Rightarrow \begin{cases} -y + z = -2x \\ -x + t = -2y \\ x - t = -2z \\ y - z = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ -2x - 2t = 0 \\ x - t = -2z \\ -y + z = -2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -t \\ -2t = -2z \\ 2z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -t \\ t = z \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ t = -x \\ z = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

La solution est $X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$

b) On vient de démontrer que $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(ce qui concorde car $\dim E_2(A) = \dim E_{-2}(A) = \underline{1}$

Or, d'après 3)b) on a $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$

Dès lors, 0 est une valeur propre de A,
et $E_0(A) = \mathrm{Vect}\langle (I, J) \rangle$ d'après 3b)

Dès lors, $Sp(\varphi) = \{-2 ; 0 ; 2\}$

Et $E_{-2}(\varphi) = Vect\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\rangle$

$E_2(\varphi) = Vect\langle\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\rangle$

$E_0(\varphi) = Vect\langle(I, J)\rangle$

Exercice 2

1)
```
p = input('entrez la valeur de p dans ]0;1[ :')
n = input('entrez la valeur de n:')
X = 0
while X <= n & rand() <= p
  X = X+1
end
disp (X, 'le niveau du joueur est:')
```

2) a) X_n est une variable aléatoire qui représente le niveau du joueur.

Or, le niveau du joueur peut aller de 0 (s'il échoue au niveau 1) à n (s'il gagne le niveau n)

le niveau est un chiffre entier (en effet l'énoncé dit $k \in [\![1 ; n-1]\!]$

Dès lors, $X_n(\Omega) = [\![0 ; n]\!]$

b) $[X_n = 0]$ signifie que le joueur échoue au niveau 1.
Or la probabilité d'échouer est de $1-p$, soit q.

Donc $P(X_n = 0) = q$

c) $[X_n = n]$ = " le joueur réussit les n niveaux

Donc $[X_n = n] = [R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1} \cap R_n]$

Dès lors, $P(X_n = n) = P(R_1 \cap R_2 \dots \cap R_n)$
$= P(R_1)P(R_2) \dots P(R_n)$
car la probabilité de réussir est constante et ne dépend pas du niveau précédent (s'il gagne bien sur) (on pouvait utiliser la formule des probabilités composés puis dire par indépendance)
Or, $P(R_1) = P(R_2) = \dots P(R_n) = p$

Donc $P(X_n = n) = p^n$

d) $[X_n = k] = [R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}]$
$k \in [\![1 ; n-1]\!]$

Donc $P(X_n = k) = P(R_1 \cap R_2 \dots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}})$

avec la même justification que 2)c)
$= P(R_1)P(R_2) \dots P(R_k)P(\overline{R_{k+1}})$
$= p^k \times (1-p)$
$= p^k q$

Pour $k=0$, $P(X_n = 0) = p^0 q = q$

On retrouve donc le résultat de 2)b)
Donc l'expression reste valable pour $k=0$

Copie anonyme - n°anonymat : 202033

Emplacement QR Code

202033 V9-00108

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) $\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k q + p^n$ (avec $p \in]0;1[$)

$= q \times \frac{1-p^n}{1-p} + p^n$

$= q \times \frac{(1-p^n)}{q} + p^n$

$= 1 - p^n + p^n$

$= 1$

4) a) $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, X_n admet une espérance ssi

$\sum_{k=0}^{n} kP(X_n=k)$ converge absolument, ie converge car X_n est à valeurs positive

Or $X_n(\Omega)$ est fini, donc X_n admet une espérance.

$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} k q p^k + n p^n$

$= q p \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} + n p^n$

$= qp \times \frac{1-p^{n-1}}{(1-p)^2} + n p^n$

$= \frac{p(1-p^{n-1})}{q} + n p^n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(1-p^{n-1})}{q} + np^n$

Or $p \in]0;1[$, donc $\lim_{n \to +\infty} np^n = 0$ par croissance comparée.

De plus, $\lim_{n \to +\infty} p^{n-1} = 0$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{p}{q}$

5) a) $\forall$ entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on se retrouve dans le cas de la question 2)b) avec $k \in [\![1;n-1]\!]$,

Dès lors, nous avons déjà démontré que $P(X_n = k) = p^k q$

b) Dès lors, $P(X_n = k) = p^k q$ et ne dépend donc pas de n, ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire X définie à la question 2)a tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = p^k q$

c) Soit $Y = X + 1$, donc $P(Y = k) = P(X = k-1)$
Donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
$= p^{k-1} q$
$= (1-q)^{k-1} q$

Dès lors, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$

Ainsi $E(Y) = E(X+1) \iff E(Y) = E(X) + 1$ par linéarité de l'espérance
$\iff E(X) = \frac{1}{q} - 1$

On $\frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q} = \lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$

Dès lors, $E(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$

Exercice 3

1) $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n$ entier naturel supérieur ou égal à 1, f_n est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0;1]$ avec $x+n \neq 0$.

Dès lors, $\forall x \in [0;1]$, $f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2}$

On $(x+n)^2 > 0$ et $n \geq 1$

Donc

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{1+n}$

2) Ainsi, $\forall x \in [0;1]$

$$0 \leq \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{car } \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{car } n \geq 1)$$

Les fonctions en jeu sont continue et positive sur $[0;1]$, et $0 < 1$.

Dès lors, par la croissance de l'intégrale on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}\,dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx \leq \frac{1}{n(n+1)}(1-0)$$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\forall$ entier naturel n non nul et $x \in [0;1]$

3) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$

Or, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$

Or u_n et $\dfrac{1}{n^2}$ sont positif et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann (avec $\alpha = 2 > 1$)

Dès lors, la série de terme général u_n est convergente

4) On vient de montrer que la série de terme général u_n converge, soit que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

Or, $\sum_{k=1}^{n} u_k = S_n$

Donc $\lim_{n \to +\infty} (S_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ qui converge d'après 3)

Dès lors, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et converge vers une limite notée γ.

b) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$

par télescopage $= 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 202033

Emplacement QR Code

U9-00108
202033

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Dès lors, puisque $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = y$ (les termes étant tous positifs)

Nous avons donc $0 \leq y \leq 1$

c) $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k$

$= u_{n+1}$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+1}$ d'après 2)

Ainsi, $S_{n+1} - S_n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

5) a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a(x+b) - bk}{k(x+k)}$

$\Rightarrow x = (ax + k(a-b) \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ k(a-b) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = b \end{cases}$ car $k \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi les deux réels a et b tels que, $\forall x \in [0;1]$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on ait $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$ sont $a=1$ et $b=1$

Dès lors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$u_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{k} - \ln(x+k)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k} - \ln(1+k) - \frac{0}{k} + \ln(k)$$

Dès lors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k} - \ln(1+k) + \ln(k)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k\right) \quad \text{d'après 5 a)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{par télescopage.}$$

6) a) $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1)$

Dès lors, $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$

$= \lim_{n\to+\infty} S_n$

$= \gamma$

Dès lors, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est γ

b) $\forall x \in [n; n+1]$, on note $f(x) = \ln(x)$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\quad n \leq x \leq n+1 \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \iff \frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n}$

Or, f est continue sur $[n; n+1]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

on a $\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq f(n+1) - f(n) \leq \frac{1}{n}(n+1-n)$

$\iff \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$

$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$

$\iff \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$

Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} - T_n \leq 0$

Ainsi, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

c) Dès lors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ, donc $T_n \geq \gamma$

Et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ donc $\gamma \leq S_n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad S_n \leq \gamma \leq T_n$

7) a) Ainsi $S_n \leq \gamma \leq T_n$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \gamma - S_n \leq T_n - S_n$$

Or $T_n - S_n \geq 0$, donc $S_n - T_n \leq 0$

Donc $S_n - T_n \leq \gamma - S_n \leq T_n - S_n$

donc $|\gamma - S_n \leq T_n - S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dès lors, lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}, S_n est une estimation rapprochée de γ.

b) $T_n - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1)$

$= \ln(n+1) - \ln(n)$

```
n = 1
s = 1 - log(2)
while s > 10^(-3)
n = n+1
s = s+(1/n) - log(n+1)
end
disp(s)
```

Copie anonyme - n°anonymat : 202033

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code 202033 8010-08-65

Problème

Partie 1

1) a) $\forall$ couple (p,q) d'entiers naturel et $x \in [0;1]$, la fonction $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est bien définie et continue

Dès lors, l'intégrale $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ est bien définie

b) $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$

$u'(x) = x^p$ $\qquad v(x) = (1-x)^q$

$u(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ $\qquad v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, donc par intégration par parties :

$$I(p,q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \times (1-x)^q\right]_0^1 + \int_0^1 q(1-x)^{q-1} \times \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$= 0 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}$$

$$= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$$

2) a)

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}(1-x)^0\,dx$$
$$= \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{p+q+1}$$

Dès lors, $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1}$
$$= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

b) Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = I(p,p)$
$$= \frac{p!p!}{(p+p+1)!}$$
$$= \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Partie 2

3) $b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n(1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$

Dès lors, b_n est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf eventuellement en 0 et en 1 (i)

$\alpha_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0;1]$:

$0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq (1-x)^n \leq 1$

Dès lors, $\forall x \in [0;1]$, $\alpha_n x^n(1-x)^n \geq 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $b_n(x) \geq 0$ $(\underline{ii})$

Enfin, $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)dx = \int_0^1 \alpha_n x^n(1-x)^n dx$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n,n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{d'après 2b)}$$

$$= 1 \quad (\underline{iii})$$

Dès lors, d'après $(\underline{i})(\underline{ii}),(\underline{iii})$, b_n est une densité

4) X_0 est une variable aléatoire qui admet b_0 comme densité

Soit $b_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$

On reconnait la densité d'une loi uniforme sur $[0;1]$.

Ainsi $X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$

5) a) X_n possède une espérance ssi $\int_0^1 \alpha_n x^{n+1}(1-x)^n dx$ converge absolument, ie converge.

Or, on reconnait $I(n+1,n)\alpha_n$ qui converge, donc X_n admet une espérance et :

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!(n)!}{(2n+2)!}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(2n+1)!} \times \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{n!} \times \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) X_n possède une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2 ie ssi $\int_0^1 \alpha_n x^{n+2}(1-x)^n dx$ converge absolument, ie converge.

Or, on reconnait $\alpha_n \times I(n+2, n)$ qui converge

Donc X_n possède une variance

$$E(X_n^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!\,(n)!}{(2n+3)!}$$

$$= \frac{(2n+1)!\,(n!)^2\,(n+1)(n+2)}{(n!)^2 \times (2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

D'après Koenig-Huygens:

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+4-2n-3}{2(2n+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(2n+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{4(2n+3)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 202033

Emplacement QR Code

V9-00108 202033

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) D'après la formule de Biénaymé Tchebychev :

$P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Leftrightarrow P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon \leq \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)} = 0$

Ainsi puisque $P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \geq 0$, alors par encadrement,
$\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) = 0$

Partie 3

6) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = a_0 \int_0^x 1 \, dt$

(car $\alpha_0 = \frac{(1)!}{(0!)^2} = 1$) $= 1 \times [t]_0^x$

$= x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$

7) a) $f_n(1) = \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$

On reconnait la densité b_n de la question 3 qui est à valeurs dans $[0;1]$

Dès lors, $f_n(1) = \int_0^1 \alpha_n t^n (1-t)^n dt$

$= \int_0^1 b_n(t) dt$

$= 1$

donc $f_n(1) = 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n dt$

Posons $u = 1-t$ (la fonction $t \mapsto 1-t$ est C^1 sur $[0;x]$ donc le changement de variable est licite).

Donc $f_n(x) = \alpha_n \int_1^{1-x} (1-u)^n u^n (-1) du$

$= \alpha_n \int_{1-x}^1 u^n (1-u)^n du$

Or, $f_n(x) + f_n(1-x) = \alpha_n \int_{1-x}^1 u^n (1-u)^n du + \alpha_n \int_0^{1-x} u^n (1-u)^n du$

$= \alpha_n \left(\int_{1-x}^1 u^n (1-u)^n du + \int_0^{1-x} u^n (1-u)^n du \right)$

par Chasles $= \alpha_n \left(\int_0^1 u^n (1-u)^n du \right)$

$= f_n(1)$

Or, d'après 7)a), $f_n(1) = 1$

Dès lors, $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) + f_n(1-x) = 1$

c) Dès lors, pour $x = \frac{1}{2}$, on a :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc $\underline{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$

8) a) La fonction $t \mapsto t^n(1-t)^n$ est continue et bien définie sur $\mathbb{R}$.

Dès lors, il existe une primitive F_1 de cette fonction qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Ainsi, $f_n(x) = \alpha_n \left(F(x) - F(0)\right)$

Or, $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc par composition, $F(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

α_n est une valeur ne dépendant pas de x et $F'(0) = 0$

Dès lors f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\underline{f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

Dès lors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \alpha_n F'(x)$

$$\underline{= \alpha_n x^n (1-x)^n}$$

b). • si n est pair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ est positive et $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)^n$ est positive.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \geq 0$

Donc si n est pair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) \geq 0$.

• si n est $\boxed{\text{impair}}$, $\alpha_n \geq 0$ et :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
t^n		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-t)^n$		$+$		$+$	0	$-$	
$t^n(1-t)^n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dès lors, si n est $\boxed{\text{impair}}$, $f_n'(x) \geq 0$ si $x \in [0;1]$
$f_n'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

9) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n \, dt$

Or, $t^n(1-t)^n = (t(1-t))^n = (t-t^2)^n$

Or, t et t^2 commutent naturellement, donc :

$$(t-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} \times (-t^2)^k$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 202033

Emplacement QR Code

V9-00108
202033

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :** 28	**Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques E EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Dès lors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} \times (-t^2)^k \, dt$

$$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^{n-k} \times (-t^2)^k \, dt$$

$$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^{n-k} \times (-t)^k t^k \, dt$$

$$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^{n} \times (-1)^k t^k \, dt$$

$$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^x t^{n+k} \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_n \left[\frac{t^{n+k+1}}{n+k+1} \right]_0^x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_n \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}$$

Dès lors, on remarque que f_n est une fonction polynomiale

↳ TSVP

b) On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}$, si n est pair, $f_n'(x) \geq 0$

Donc

x	$-\infty$	$+\infty$
f_n	$\nearrow$	

si n est impair, $\forall x \in [0;1]$, $f_n'(x) \geq 0$ et $\forall x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$, $f_n'(x) \leq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f_n		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

10) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$

f_n' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n''(x) = \alpha_n\left(n x^{n-1}(1-x)^n + x^n(-n)(1-x)^{n-1}\right)$

$$= \alpha_n\left(n x^{n-1}(1-x)^n - n x^n (1-x)^{n-1}\right)$$

$$= n\alpha_n\left(x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^{n-1}\right)$$

b) Dès lors, cherchons le signe de $f_n''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\alpha_n \geq 0$

Or, $\left(x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^{n-1}\right) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$

Or, si n est impair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{n-1} \geq 0$ (car $n-1$ sera pair)
et $(1-x)^{n-1} \geq 0$

Dès lors le signe dépend de $1-2x$
$1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

• Donc si n est impair,

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_n''(x)$		$+$	0	$-$	

• Si n est pair

car $n-1$ sera impair

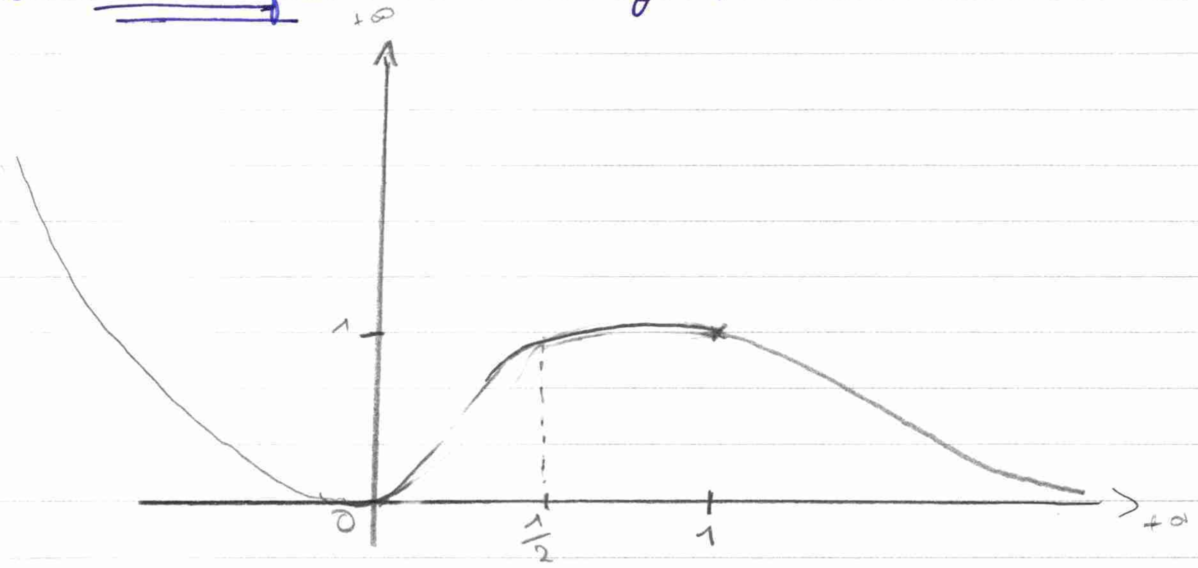
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(1-x)^{n-1}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f_n''(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Dès lors, si n est impair, $f_n''(x)$ change une fois de signe sur $\mathbb{R}$, tandis que si n est pair, $f_n''(x)$ change 3 fois de signe sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, (C_n) possède un point d'inflexion si n est impair et trois si n est pair.

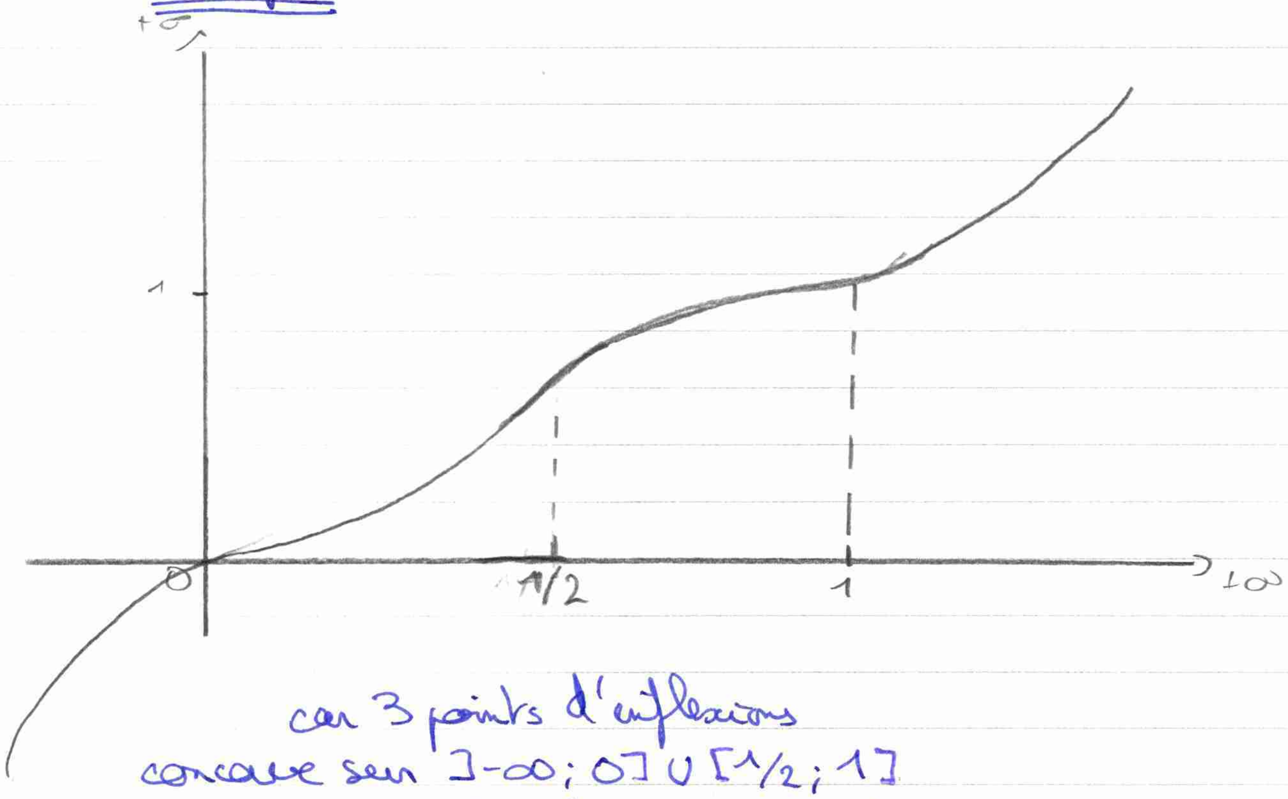
si n est impair

$f(1) = 1$



car un point d'inflexion en $\frac{1}{2}$, convexe si $x \geq \frac{1}{2}$ et concave si $x \leq \frac{1}{2}$

Si n est pair



car 3 points d'inflexions

concave sur $]-\infty ; 0] \cup [1/2 ; 1]$

convexe sur $[0 ; \frac{1}{2}] \cup [1 ; +\infty[$