E9-00159
960004
Maths E

Code épreuve : 296 **Nombre de pages :** 41 **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques E EmLyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

Partie A)

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$X+1(\Omega) = \boxed{\mathbb{N}^* = Y(\Omega)}$

$\forall k \in Y(\Omega)$

$P(X+1 = k) = P(X = k-1) = \boxed{q^{k-1} p = P(Y = k)}$

$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

2) $E(Y) = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow E(X+1) = E(X) + 1$ par linéarité de l'espérance

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = E(X)+1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} - 1 = E(X)$

$\Leftrightarrow \frac{1-p}{p} = \boxed{E(X) = \frac{q}{p}}$

$V(Y) = \frac{q}{p^2}$

$V(X+1) = \frac{q}{p^2}$, donc par la forme quadratique de la variance

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$V(X) = V(y) = \frac{q}{p^2}$$

3) function X = simule_X(p)
```
function X = simule_X(p)
    y = 1
  while rand() > p
    y = y+1
  end
  X = y - 1
endfunction.
```

Partie B)

4)
```
function Z = simule_Z(n,p)
    Z = 1
    for i = 1:n
    for j = 1:Z
    s =      + simule_X(p)
  end
  Z = s
 end
endfunction.
```

5) a) $U_0 = P(Z_0 = 0) = 0$ puisque $Z_0 = 1$ est un événement certain

$U_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0) = p$

5 b). $\forall n \in \mathbb{N}$,

$[Z_n = 0]$ le joueur n'a plus de jeton à l'instant n

$[Z_{n+1} = 0]$ le joueur n'a plus de jeton à l'instant $n+1$.

$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ car si le joueur n'a plus de jeton à l'instant n il n'a plus de jetons à l'instant $n+1$.

Donc $Z_n \subset Z_{n+1}$, il s'agit d'une suite d'événement croissant

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone
Puisqu'il s'agit d'une probabilité, $U_n \in [0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi par théorème de limite monotone $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, car elle est monotone et bornée.
$U_n \xrightarrow[+\infty]{} l$

6).

$R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [Z_n = 0]$, par théorème de limite monotone pour les probabilité il vient que

$P(R) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} (Z_k = 0)\right) = \lim_{n \to +\infty} U_n = l$

Ainsi $P(R) = \ell$.

7) a) $\forall k \in \mathbb{N}$,

$\cancel{P(Z_2 = 0)}$
$(Z_1 = k)$

~~il possède k jetons qu'il mise à l'instant 2. La machine s'active, pour qu'il ait 0 jetons à l'instant 2 il faut que après l'activation de la machine, à l'instant 1 il n'y ait plus de jetons donc que la somme~~ $\sum_{i=1}^{k} X_i$ ~~soit nul.~~

$(Z_2 = 0)$
$(Z_1 = k)$.

le joueur possède k jetons à l'instant 1, et 0 à l'instant 2. En versant k jetons la machine lui renvoie 0 jetons Donc $(X_1 + X_2 \dots + X_k = 0)$.

or $[(X_1 + X_2 \dots + X_k) = 0] = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \dots \cap (X_k = 0)$.

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathematiques E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1)

7b) $\forall k \in \mathbb{N},\ P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0) = (U_n)^k$.

$(Z_1=k)_{k\in\mathbb{N}}$, forment un système complet d'événement, par la formule des probabilités totales on a :

$$P(Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((Z_1=k)\cap(Z_{n+1}=0))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k)\,P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k)\,(U_n)^k$$

or Z_1 suit la même loi que X

$$P(Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k\, p\, U_n{}^k$$

$$= p\sum_{k=0}^{+\infty} (qU_n)^k$$

on reconnait une série géométrique de raison $|qU_n| < 1$.

$$= p \times \frac{1}{1-qU_n} = \boxed{\frac{p}{1-qU_n} = P(Z_{n+1}=0)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8) a) $U_{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ par principe d'unicité

Donc $\frac{p}{1-qU_n} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{p}{1-q\ell}$.

Donc on a ainsi

$$\ell = \frac{p}{1-q\ell}.$$

$\Leftrightarrow \ell(1-q\ell) = p.$
$\Leftrightarrow \ell(1-q\ell) - p = 0$
$\Leftrightarrow \ell - q\ell^2 - p = 0$
$\Leftrightarrow 0 = p + q\ell^2 - \ell.$ (*)
$\Leftrightarrow 0 = (\ell-1)(q\ell - p)$

Preuve : $(\ell-1)(q\ell-p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p$
$= q\ell^2 - (1-q)\ell - q\ell + p$
$= q\ell^2 - \ell + \cancel{\ell q} - \cancel{q\ell} + p$
$= \underline{q\ell^2 + p - \ell}$ (*)

Donc ℓ vérifie bien $\boxed{0 = (\ell-1)(q\ell - p)}$

8) b). $p \geq \frac{1}{2}$

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session :

Épreuve de : Mathematique E ML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 suite
Partie c) 12 p).

$$V_n = 1 - U_n$$
$$= 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$
$$= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - \cancel{1} + \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$
$$= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n\left(1-\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$

Prouvons $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(N)$: " $0 \leq V_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$ "

$\boxed{I}$ pour $n=0$.

$V_0 = 1$ $\quad \left(\frac{q}{p}\right)^0 = 1$.

Donc $0 \leq V_0 \leq \left(\frac{q}{p}\right)^0$
$P(0)$ est vraie.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\boxed{H}$ Supposons $P(N)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, montrons que que $P(N+1)$ est vraie.
tq : " $0 \leq V_{n+1} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$ "

On sait que :
$0 \leq V_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$

12 c). T admet une espérance si et seulement si $\sum n P(T=n)$ converge absolument.

$$\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N.$$

Or $V_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} V_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n - \underbrace{N V_N}_{<0} \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

on reconnait une série géométrique de raison $\left|\left(\frac{q}{p}\right)\right| < 1$, donc convergente.

Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum V_n - N V_N$ converge, $E(T)$ existe et on a :

$$E(T) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{E(T) \leq \frac{1}{1-\frac{q}{p}}}$$

13).

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathématique E emlyon.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1) Partie C)

$p \geq \frac{1}{2}$.

9)

T la variable égale au nombre d'activation de la machine lorsque pour la première fois le joueur n'a plus de machine.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ (T \leq n) = (Z_n = 0)$

car il joue un nombre de fois inférieur ou égale à n et se retrouve sans jetons, donc il n'a plus de jeton à l'instant n.

Donc $P(T \leq n) = P(Z_n = 0) = U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$P(T \leq n-1) = U_{n-1}$

$\Rightarrow P(T \leq n) = P(T = n) + P(T < n)$

$\Rightarrow P(T \leq n) = P(T = n) + P(T \leq n-1)$

$\Rightarrow P(T \leq n) - P(T \leq n-1) = P(T = n)$

$\Rightarrow U_n - U_{n-1} = P(T = n)$

or $U_n = 1 - V_n$.

$\Rightarrow 1 - V_n - (1 - V_{n-1}) = P(T = n)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Rightarrow 1 - V_n - 1 + V_{n-1} = P(T=n)$

$\Rightarrow \boxed{P(T=n) = V_{n-1} - V_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

10). $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=1}^{N} n(V_{n-1} - V_n)$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{N} n V_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n V_n.$

$j = n-1$

$\displaystyle = \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) V_j - \sum_{n=1}^{N} n V_n$

$\displaystyle = \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} j V_j}_{(x)} + \sum_{j=0}^{N-1} V_j - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} n V_n}_{(x)}$

Télescopage

$\displaystyle = 0 + \sum_{j=0}^{N-1} V_j - N V_N$

$\displaystyle = \sum_{j=0}^{N-1} V_j - N V_N$

11). $p = \frac{1}{2}$

a) Prouvons $\forall n \in \mathbb{N}$, " $U_n = \frac{n}{n+1}$ "

$\boxed{I}$ pour $n = 0$

$U_0 = 0$ Vraie d'après 12.

$P(0)$ est vraie

11

[H] Supposons $P(N)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, montrons que $P(N+1)$ est encore vraie telle que « $U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ »

$$U_n = \frac{n}{n+1}.$$

$p = \frac{1}{2}$

Donc $q = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} U_n = -\frac{1}{2}\frac{n}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} U_n = 1 - \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}U_n} = \frac{1}{1 - \frac{n}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}U_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2(n+1)-n}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2n+2-n}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n+2}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}(n+1)}{n+2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$P(N+1)$ est vraie si $P(N)$ l'est

[C] La propriété est initialisée et héréditaire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{n}{n+1}$$

13 /

11 b). T admet une espérance si $\sum k P(T=k)$ est absolument convergente

or $\sum_{k=1}^{n} k P(T=k) = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1})$

$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{k}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k \frac{(k-1)}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k-1$.

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k + n$.

or $\frac{k^2}{k+1} \underset{+\infty}{\sim} k$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1}$

11b) T admet une espérance si et seulement si $\sum k P(T=k)$ converge absolument

or $\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N$

or $V_n = 1 - U_n$

$= 1 - \frac{n}{n+1}$

$= \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Donc $\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - N\left(\frac{1}{N+1}\right)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Code épreuve : 246 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathematique EML E.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1)
11) suite

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N(1+\frac{1}{N})}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1+\frac{1}{N}}$$

or $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente à un terme près.

Donc $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1+\frac{1}{N}}$ diverge.

Donc T n'admet pas d'espérance

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

12) a) $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$W_{n+1} = \frac{1 - U_{n+1}}{\frac{p}{q} - U_{n+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1-qU_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qU_n}}$$

$$= \frac{\frac{1-qU_n-p}{1-qU_n}}{\frac{p(1-qU_n)-pq}{q(1-qU_n)}}$$

$$= \frac{1-qU_n-p}{\cancel{(1-qU_n)}} \cdot \frac{q\cancel{(1-qU_n)}}{p(1-qU_n)-pq}$$

$$= \frac{(1-qU_n-p)q}{p((1-qU_n)-q)}$$

$$= \frac{(1-qU_n)q}{\ldots}$$

(2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad W_{n+1} = \dfrac{1 - U_{n+1}}{\frac{p}{q} - U_{n+1}}$

$$= \frac{1 - \frac{p}{1-qU_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qU_n}}$$

$$= \frac{\frac{1-qU_n - p}{1-qU_n}}{\frac{p(1-qU_n) - pq}{q(1-qU_n)}}$$

$$= \frac{1-qU_n - p}{\cancel{(1-qU_n)}} \cdot \frac{q\cancel{(1-qU_n)}}{p(1-qU_n)}$$

$$= \frac{(1-qU_n-p)\,q}{p(1-qU_n)}$$

$$= \frac{q}{p}\left(\frac{1-qU_n-p}{1-qU_n}\right)$$

Admettons $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \dfrac{q}{p} W_n$.

12) b) (w_n) est géométrique de raison $\frac{q}{p}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \left(\frac{q}{p}\right)^n$.

$$w_0 = \frac{1-0}{\frac{p}{q} - 0} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}$$

$$\boxed{w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} = \dfrac{1 - U_n}{\frac{p}{q} - U_n}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{q} - U_n\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} = 1 - U_n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^n - U_n\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} = 1 - U_n.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^n - 1 = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} U_n - U_n.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^n - 1 = U_n\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - 1\right).$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n = U_n\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = U_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 1 - U_n$ ~~et $U_n = 1 - V_n$~~.

$\Leftrightarrow V_n = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n\right) / \, 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathématique E EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1) a). Soit M et $N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
a-t-on $tr(M+\lambda N) = tr(M) + \lambda tr(N)$.

$$tr(M+\lambda N) = \sum_{i=1}^{2} (m_{ii} + \lambda m_{ii})$$

par linéarité de la somme.

$$= \sum_{i=1}^{2} m_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{2} m_{ii}$$

$$= tr(M) + \lambda\, tr(N)$$

Donc tr est linéaire.

1 b). $\dim(\mathrm{Im}(tr)) \leq 1$.
or il est absurde de dire que $\dim \mathrm{Im}(tr) = 0$ car par exemple $tr(I_2) = 2$.

Donc $\dim(\mathrm{Im}(tr)) = 1$
$\mathrm{Im}(tr) = \mathbb{R}$

Par théorème du rang il vient que
$4 = \dim \ker(tr) + rg(tr)$
$(=) \; 3 = \dim \ker(tr)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

on remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(tr)$

$$\boxed{\ker(tr) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}$$

2. 1. Montrons que f est linéaire.

Soit M et $N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $f(M+\lambda N) = f(M) + \lambda f(N)$?

$f(M+\lambda N) = M + \lambda N + tr(M+\lambda N) J$ or tr est linéaire

il vient que $= M + \lambda N + [tr(M) + \lambda tr(N)] J$

$= M + \lambda N + tr(M) J + \lambda tr(N) J$

$= M + tr(M) J + \lambda [N + tr(N) J]$

$= f(M) + \lambda f(N)$

f est linéaire.

soit $M \in M_2(\mathbb{R})$

or $f(M) = M + \underbrace{tr(M)} J$ or $tr(M)$ est un réel

Donc $M + tr(M) J \in M_2(\mathbb{R})$

Bilan : f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

3) a) $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot J$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{E_{11} + 2E_{12} + E_{21}}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = E_{12}.$$

$$f(E_{21}) = E_{21}$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2E_{12} + E_{21} + E_{22}).$$

$$A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(E_{11}) & f(E_{12}) & f(E_{21}) & f(E_{22}) \end{array} & \end{array}$$

3b) $\cdot$ $(A - I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= O_4.}$$

21/

3c) on déduit $P(X) = (X-1)^2$ est polynome annulater de A

Ainsi $P(X) = 0$
$\Leftrightarrow (X-1)^2 = 0$ $\boxed{X = 1}$

$\lambda = 1$ est l'unique valeur propre possible.

or $A - I_4$ n'est pas inversible car elle possède 2 colonnes identiques

Donc $sp(A) = \{1\}$.

A a une valeur propre elle est diagonalisable si et seulement si
$A \sim I_4$ $\exists P$ inversible telle que
Donc $A = P^{-1} 1 I_4 P$
$= P^{-1} I_4 P$
$= P^{-1} P$
$= I_4$

or $A \neq I_4$ Donc A n'est pas diagonalisable

3d). $0 \notin sp(A)$ donc A est inversible.
on résout le système :

$$\begin{cases} x & & & & = a \\ 2x & +y & & +2t & = b \\ x & + & z & +t & = c \\ & & & t & = d. \end{cases}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2021
	Épreuve de : mathématique E emlyon		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

Exercice 2 suite

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = d \\ x = a. \\ 2a + y + 2d = b \Leftrightarrow \boxed{y = b - 2a - 2d} \\ a + z + d = c \Leftrightarrow \boxed{z = c - a - d} \end{cases}$$

$x = a$
$y = -2a + b - 2d$
$z = -a + c - d$
$t = d.$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) a). $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$1 \in sp(f)$ si et seulemet si

$f - Id$ est non injecti~~ve~~ bijective.

~~supposons $f - id$ bijective, il existe g telle que $(f - id) \circ g = id$.~~

! $\exists\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où M est non nul telle que

$f(M) = M$.

$\Leftrightarrow M + tr(M)M = M$

$\Leftrightarrow tr(M)M = 0$

$M \neq 0$

Donc $tr(M) = 0$.

$M \in (\ker(tr))$.

Donc $1 \in sp(f)$ et $\boxed{\dim E_1(f) = 3 = \dim \ker(tr)}$

4b). $f(J) = J + tr(J)J$

$= (1 + tr(J))J$.

J est vecteur propre associé à la valeur propre $\boxed{1 + tr(J)}$

4c) i) $tr(J) \neq 0$.

$1 + tr(J) \in sp(f)$

$1 \in sp(f)$.

$\dim E_1(f) = 3$ et $\dim E_{1+tr(J)}(f) \geq 1$.

24/

$sp(f) = \{1, 1 + tr(J)\}$

$\dim E_1(f) + \dim_{1+tr(J)}(f) \geq 4$

Donc f est bien diagonalisable

4)c)ii) $tr(J) = 0$.

$\exists \lambda \neq 1$ tel que $\lambda \in sp(f)$.
et $M \in E_\lambda(f)$

Donc $f(M) = \lambda M$.

or J est vecteur propre

$f(J) = J + tr(J) J \qquad tr(J) = 0.$
$f(J) = J$

4c)iii) f est diagonalisable si et seulement si $tr(J) \neq 0$

4d).

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématique EML E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3).

1) f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ comme quotient et composition de fonctions de références dont le dénominateur ne s'annule pas.

en 0 :

$\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$

$\Rightarrow -\ln(1-t) \sim t$

$\Rightarrow -\dfrac{\ln(1-t)}{t} \sim 1 = f(0)$

Donc $f(t) \xrightarrow[0]{} 1 = f(0)$

f est continue sur $]-\infty ; 1[$.

2a). $\forall t \in]-\infty ; 1[$ soit $g(t) = \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$.

g est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ comme somme, quotient et composition de fonction de référence

$\forall t \in]-\infty ; 1[$, $g'(t) = \dfrac{1-\cancel{t}+\cancel{t}}{(1-t)^2} + \dfrac{-1}{1-t}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{-1(1-t)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{1 \cancel{-1} + t}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}$$

t	$-\infty$		0		1
g'		$-$		$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g admet un minimum 0 en 0.

$g(0) = 0$, donc $\forall t \in]-\infty, 1[, \ g(t) \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$$

2b) f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$ comme quotient et composées de fonction de références.

$\forall t \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

$$f'(t) = \frac{-\frac{-t}{1-t} - \ln(1-t)}{t^2}$$

$$= \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$$

or $\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0 \ \forall t \in]-\infty, 1[$.

Donc par quotient de réels positifs.

$\forall t \in]-\infty; 1[, \ f'(t) \geq 0$

2c) $\forall t \in]-\infty;1[$, $f'(t) \geq 0$

f est strictement ↑ croissante sur $]-\infty;1[$

3a) . $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$\Rightarrow \ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

3b) . $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$

$= \frac{\frac{-\ln(1-x)}{x} - 1}{x}$

$= \frac{-\ln(1-x) - x}{x^2}$

$= \frac{-\left(-\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{x}}{x^2}$

$= \frac{\cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x}}{x^2}$

$= \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x^2)\right)}{\cancel{x^2}}$

$= \frac{1}{2} + \varepsilon(x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3c) · $f'(t) = \dfrac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$

$$\underset{0}{=} \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{t^2(1-t)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{t + (1-t)\left(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2(1-t)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\cancel{t} - \cancel{t} - \frac{t^2}{2} + t^2 + o(t^2)}{t^2(1-t)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2(1-t)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\cancel{t^2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon(\cancel{t}^2)\right)}{\cancel{t^2}(1-t)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(t^2)}{1-t} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f' est continue sur $]-\infty, 1[$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathematique E Eml

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3 suite.

4).

$$\cancel{\ln(1-t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty}$$

$$\cancel{-\frac{\ln(1-t)}{t} = \frac{-\ln\left(t\left(-1+\frac{1}{t}\right)\right)}{t} = -\frac{\ln(t) + \ln\left(-1+\frac{1}{t}\right)}{t}}.$$

$$\cancel{= -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{\ln\left(-1+\frac{1}{t}\right)}{t}}$$

$$\cancel{\frac{\ln(t)}{t} \longrightarrow 0}$$

4). $f(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$

$\ln(1-t) \xrightarrow[1]{} -\infty$

$-\ln(1-t) \xrightarrow[1]{} +\infty$

$f(t) \xrightarrow[1]{} +\infty$ par quotient de limite

Il y a une asymptote verticale en 1.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

en $-\infty$.

$$\frac{-\ln(1-t)}{t} = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)}{t}$$

$$\frac{1}{1-t} \xrightarrow[-\infty]{} 1.$$

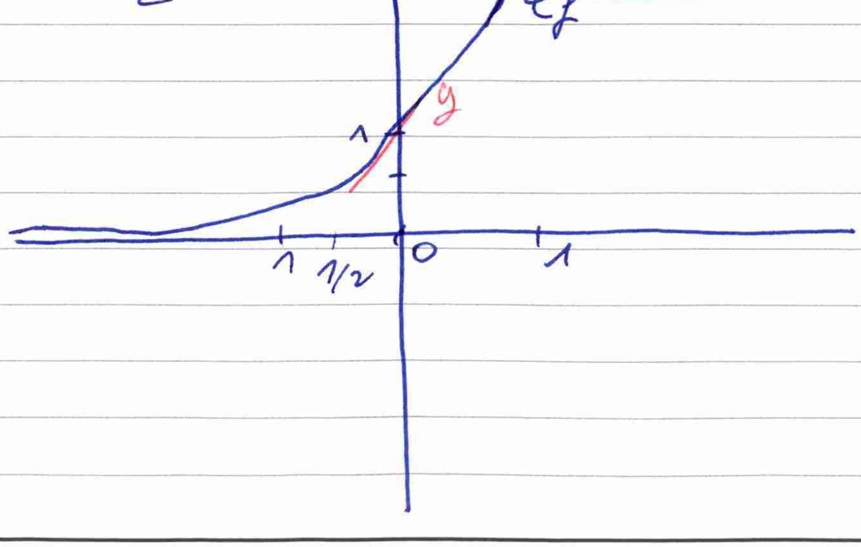
$$\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \xrightarrow[-\infty]{} 0$$ par composition de limite, ln étant continue sur $\mathbb{R}^{+}_{*}$.

Par produit de limite.

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0}$$

5). équation de la tangente en 0.

$y = f'(0)(x) + f(0)$
$= \frac{1}{2}x + 1. = \boxed{\frac{1}{2}x + 1}$



Partie B).

f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ donc admet des primitives. on note F l'une d'entre-elles.

6) $L(x) = \int_0^x f(t)\,dt = [F(t)]_0^x$

$= F(x) - F(0)$

L est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ comme ~~compo~~ fonctions ~~~~ puisque f est $\mathcal{C}^1$.

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 1[, \quad L'(x) = f(x)}$$

7) . $\forall (A, B) \in]0;1[^2$

~~$L(x) = \int$~~ $\int_A^B f(t)\,dt = \int_A^B -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

on pose $u = 1-t$, u est affine sur $\mathbb{R}^+$.

① $du = u'\,dt = -dt$

② $-\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\frac{\ln(u)}{1-u}\,dt$

$= \frac{\ln(u)}{1-u}(-1)\,dt$

$= \frac{\ln(u)}{1-u}\,du$

③ $\int_{B \to 1-B}^{A \to 1-A}$. Par changement de variable affine on obtient:

$$\int_A^B f(t)\,dt = \int_{1-B}^{1-A} -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt$$

7b). $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0;1[$.

$$\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

somme géométrique.

$$= -\ln(t)\sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= -\ln(t)\,\frac{1-t^{n+1}}{1-t} + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= \frac{-\ln(t) + \cancel{\ln(t)t^{n+1}} \cancel{- t^{n+1}\ln(t)}}{1-t}$$

$$\boxed{= -\frac{\ln(t)}{1-t}}$$

7c). on pose $A > 0$.

$$\int_A^1 -t^k \ln(t)\,dt = -\int_A^1 t^k \ln(t)\,dt$$

$u(t) = \ln(t)$ $\qquad u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t^k$ $\qquad v(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}.$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
Par intégration par parties:

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Code épreuve : 246 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathematique E EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exo 3 suite.

Par IPP on a:

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_A^1 - \frac{1}{n+1}\int_A^1 t^n\,dt.$$

Du coup : par IPP :

$$\int_A^1 -t^n \ln(t)\,dt = -\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_A^1 + \frac{1}{n+1}\int_A^1 t^n\,dt$$

$$A_n = -\left(0 - \frac{A^{n+1}}{n+1}\ln(A)\right) + \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{A^{n+1}}{n+1}\right]$$

$A \to 0$ par croissance comparées on a :

$$= -(0-0) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a bien $\int_0^1 -t^n \ln(t) = \frac{1}{(n+1)^2}$

7d). $-t\ln(t) \xrightarrow[0]{} 0$ par croissance comparées.

$$\frac{-t\ln(t)}{1-t} \xrightarrow[0]{} 0.$$

$$\frac{-t\ln(t)}{1-t} = \frac{-\cancel{t}\ln(t)}{\cancel{t}(-1+\frac{1}{t})}$$

$$= \frac{-\ln(t)}{-1+\frac{1}{t}} \xrightarrow[1]{} 0$$

~~$\forall t \in]0,1[, \quad \ln(t) < 0$~~

~~$\Rightarrow -t\ln(t) > 0.$~~

~~$\Rightarrow \frac{-t\ln(1-t)}{1-t} > 0$~~

~~$1-t > 0.$~~

~~Donc $\frac{-t\ln(t)}{(1-t)} > 0.$~~

35/

$t < 1.$

$(=)$ ~~ssss~~

$0 < 1 - t.$

$\Rightarrow 0 > \frac{1}{1-t}.$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{1-t} < 1.$

$\Rightarrow -\frac{t \ln(t)}{1-t} < -t \ln(t)$

$\frac{1}{1+t}$ $\quad$ ~~1-2t~~

~~$t \ln$~~ 0

$\Rightarrow 1 < \frac{1}{1-t}$

Admettons qu'il existe un majorant. M telle que $-\frac{t \ln(t)}{1-t} \leq M.$

$\forall t \in]0;1[.$

$0 \leq t \leq 1.$

$\Rightarrow 0 \geq -t \geq -1.$

$\Rightarrow 1 \geq 1-t \geq 0$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 0$ par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}^+_*$.

$\Rightarrow -t\ln(t) \leq -\frac{t\ln(t)}{1-t} \leq 0.$

7 d). Admettons que $\dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ est borné.

telle que $m \leq \dfrac{-t\ln(t)}{1-t} \leq M$.

$\Rightarrow m t^n \leq \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \leq M t^n$.

Les fonctions intégrées sont continues sur $]0,1[$.
par croissance de l'intégrale on a :

~~$\int_0^1 m\,dt \leq \int_0^1$~~

$$\int_0^1 t^n m\,dt \leq \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt \leq M\int_0^1 t^n\,dt$$

$$\Rightarrow m\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt \leq M\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt \leq \frac{M}{n+1}.$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt = 0$$

7 e). $\dfrac{-\ln(t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} -t^k\ln(t) + \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$

~~Les fonctions intégrées sont continues. or a aussi.~~

$$\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} -t^k\ln(t)\,dt + \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$$

par linéarité de l'intégrale.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : EML E Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Rightarrow \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 -t^k \ln(t)\,dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$$

L'intégrale converge donc.

et par passage à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + 0 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

f) L est ainsi prolongeable par continuité en 1.

Puisque $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \frac{\pi^2}{6}$

$A \to 0,\ B \to 1.$

dans le changement de variable de 7a)

Donc L est bien prolongeable, et $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$

8).

Partie C).

9/a). $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\partial_1(\Phi(x,y)) = L'(x) - (-y)L'(-xy)$$
$$= f(x) + y f(-xy)$$

$$\partial_2 \Phi(x,y) = f(y) + x f(-xy)$$

9b). ~~...~~ $\nabla = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(y) + x f(-xy) = 0 \\ f(x) + y f(-xy) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(y) + x f(-xy) = 0 \\ x f(x) - y f(y) = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 \cdot x - y L_1$

$$\Leftrightarrow x f(x) = y f(y) \qquad x \text{ et } y \neq 0.$$

$$f(x) = f(y).$$

Admettons. $(-1,-1)$ est un point critique.

10a) ~~Admettons la Hessienne au point~~

$$\partial^2_{11} \Phi(x,y) = f'(x) - y^2 f(-xy)$$

$$\partial^2_{22} \Phi(x,y) = f'(y) - x^2 f(-xy)$$

$$\partial^2_{12} \Phi(x,y) = \partial^2_{21} \Phi(x,y)$$

théorème de Schwarz.

$$= f(-xy) - yx f(-xy).$$

~~On~~ en $(-1,(-1)$ on a bien.

$$\partial_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\partial_{12} = \frac{1}{2} - (-1)\frac{1}{2}$$

40/

Admettons la Hessienne

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

10 b). $\det(H - \lambda I_2) = 0$

$\Leftrightarrow (-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}$

$\lambda = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ $\qquad \lambda = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$Sp(H) = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

11) $\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$

Φ ne possède pas d'extremum local sur $(]-\infty ; 0[)^2$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751