Code épreuve : 297	**Nombre de pages :** 28	**Session :** 2022

Épreuve de : Maths S

E3-00015
142670
Maths S

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) g est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre finie de point (en a)

de plus comme f strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors F strictement positive sur donc $F(a) > 0$ donc la quantité $\frac{f(x)}{F(a)}$ existe $(x \leq a)$.

Ainsi g est bien definie.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ $F(a) > 0$ d'après l'énoncé donc $\frac{f(x)}{F(a)} > 0$ si $x \leq a$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$.

et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{F(a)} dx = \frac{1}{F(a)} \left[F(a) - \lim_{x \to -\infty} F(x)\right]$

$= \frac{1}{F(a)} \left[F(a) - 0\right]$

$= 1$

car F fonction de répartition donc $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Ainsi g peut être considéré comme une densité de Y.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2)

a) $\forall x \in \mathbb{R}\quad G(x) = P(Y \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} g(t)$$

1er cas $x \leq a$ $\quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{F(a)}\,dt$

$$= \frac{1}{F(a)}\left[F(x) - \lim_{t \to -\infty} F(t)\right]$$

$$= \frac{F(x)}{F(a)}$$

si $x > a$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{a} g(t)\,dt + 0$$

$$= 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\quad P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \dfrac{P(X \leq a,\ X \leq x)}{P(X \leq a)}$

1er cas $x \geq a$ Alors $P(X \leq a, X \leq x) = P(X \leq a)$ par double inclusion et croissance de la probabilité.

Alors $P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \dfrac{P(X \leq a)}{P(X \leq a)} = 1 = G(x)$

d'autre part si $x < a$ Alors $[X \leq a, X \leq x] = [X \leq x]$

donc $P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \dfrac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \dfrac{F(x)}{F(a)} = G(x)$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $G(x) = P_{(X \leq a)}(X \leq x)$

3) $\forall n \geq 1$ $\Pi_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$

a)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = P(\Pi_n \leq x)$$
$$= P(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x)$$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \leq x\right) \quad (Y_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ i.i.d.}$$
$$= (G(x))^n$$
$$= \begin{cases} \left(\dfrac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

b) 1er cas : si $x \geq a$ $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 1$

2ème cas : si $x < a$

$x < a$ — F croissante sur $\mathbb{R}$ (répartition)

$\Rightarrow F(x) < F(a)$

$\Rightarrow 0 < F(x) < F(a)$ — d'après l'énoncé.

$\Rightarrow 0 < \dfrac{F(x)}{F(a)} < 1$

donc $\left|\dfrac{F(x)}{F(a)}\right| < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{F(x)}{F(a)}\right)^n = 0.$$

finalement

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

(M_n) converge en loi vers la variable certaine égale à a. $\quad M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$.

4.a)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) = P(n(a - M_n) \leq x)$

$$= P\left(a - M_n \leq \frac{x}{n}\right)$$

$$= P\left(-M_n \leq \frac{x}{n} - a\right)$$

$$= P\left(M_n \geq a - \frac{x}{n}\right)$$

$$= 1 - P\left(M_n \leq a - \frac{x}{n}\right)$$

$$= 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right)$$

or $a - \frac{x}{n} \leq a$

$\Rightarrow x \geq 0$

donc $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(\dfrac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat : 142670

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2022
	Épreuve de : Maths S		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) d'après la formule de Taylor Young on a :

$$g(x+a) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x+a)^k)$$

Alors $F\left(a - \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} F(a) - f(a) \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0\right)$

et comme $F(a) > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

c) $\forall x < 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} H_n(x) = 0.$

si $x \geq 0$ on a : $\displaystyle \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}$

$$\left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)^n$$

or $\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n}\right)\right)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n} = 0$

donc $\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}$

$n\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)} x$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n}\right) = -\frac{f(a)}{F(a)} x$

et $x \mapsto e^{x}$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n = e^{-\frac{f(a)}{F(a)} x}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{f(a)}{F(a)} x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

De plus $\frac{f(a)}{F(a)} > 0$

Ainsi on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{f(a)}{F(a)}$

$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} M$ où $M \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)$

Exercice 2

1) si $h=0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $0 \leq \|f(x)\| \leq 0$

$\Rightarrow \|f(x)\| = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$

f est donc l'endomorphisme nul

F est l'ensemble vide

2) a)

$$27^2 A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Alors $A^2 = \frac{81}{27^2} I$.

$A^2 = \frac{1}{9} I$

$P = X^2 - \frac{1}{9}$ polynome annulateur de A.

$= \left(X - \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$

$sp(A) \subset \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.

les valeurs possibles de A sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

b) ${}^tA = A$ donc A matrice symétrique à valeurs réelles, donc A diagonalisable or $A + \frac{1}{3} I = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$rg\left(A + \frac{1}{3} I\right) = rg\left(\frac{1}{27}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$C_1 = C_2$ et $-2C_3 = C_2$

$C_1 \neq 0$

$= 1$

par le théorème du rang

$$\dim\left(\ker\left(A + \frac{1}{3} I\right)\right) = 2$$

donc $-\frac{1}{3} \in sp(A)$ et comme A diagonalisable

la dimension des sous espaces propres doit valoir 3.

donc nécessairement $\frac{1}{3} \in sp(A)$

Ainsi $sp(A) = \left\{\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3}\right\}$.

c) A est diagonalisable donc les sous espaces propres de A sont supplémentaires. De plus A symétrique. d'après le cours, les sous espaces propres de f sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

d) soit $x \in \mathbb{R}^3$ / $x = y + z$ avec $y \in E_{\frac{1}{3}}(f)$ et $z \in E_{-\frac{1}{3}}(f)$.

Alors $f(x) = f(y) + f(z) = \frac{1}{3} y - \frac{1}{3} z$.

$\|f(x)\|^2 = \langle \frac{1}{3} y - \frac{1}{3} z , \frac{1}{3} y - \frac{1}{3} z \rangle$

Copie anonyme - n°anonymat : 142670

Code épreuve : 297 **Nombre de pages :** 28 **Session :** 2022

Épreuve de : Maths S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

suite d)

$$\|f(x)\|^2 = \langle \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z, \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z \rangle$$
$$= \tfrac{1}{9}\langle y,y\rangle - \tfrac{1}{9}\langle y,z\rangle - \tfrac{1}{9}\langle z,y\rangle + \tfrac{1}{3}\|z\|^2$$
$$= \tfrac{1}{9}\|y\|^2 - 0 - 0 + \tfrac{1}{9}\|z\|^2 \quad (\text{car } E_1(f) \perp E_4(f))$$
$$= \tfrac{1}{9}(\|y\|^2 + \|z\|^2)$$

or $\|x\|^2 = \langle y+z, y+z\rangle = \|y\|^2 + \underbrace{\langle y,z\rangle}_{0} + \underbrace{\langle z,y\rangle}_{0} + \|z\|^2$
$$= \|y\|^2 + \|z\|^2$$

donc $\|f(x)\|^2 = \frac{1}{9}\|x\|^2$

on obtient une égalité. en posant $k = \frac{1}{9}$

$\exists k \in [0;1[\;/\; \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

3) a) supposons que $Id \in F$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|x\| \leq k\|x\| \qquad$ si $\|x\| \neq 0$
$1 \leq k$ or $k \in [0;1[$ donc absurde

$Id \notin F$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b)

$F = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \,/\, \exists k \in [0;1[, \forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|f(x)\| \leq k\|x\| \}$.

$F \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

si f endomorphisme nulle. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

$F \neq \emptyset$.

$\forall (\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F^2, \; \|(\lambda f + g)(x)\|^2 = \|\lambda f(x) + g(x)\|^2$

$= \lambda^2 \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 + \lambda \langle f(x), g(x) \rangle$

or $(f, g) \in F^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x)\|^2 \leq k^2 \|x\|^2$

$\|g(x)\|^2 \leq g^2 \|x\|^2$

$\Rightarrow \|(\lambda f + g)(x)\|^2 \leq (\lambda k)^2 \|x\|^2 + g^2 \|x\|^2 + \lambda \langle f(x), g(x) \rangle$

il faudrait trouver un contre exemple.

c) soit $(f, g) \in F^2$ $\exists k \in [0;1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|f(x)\| \leq k\|x\|$

$\exists m \in [0;1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|g(x)\| \leq m(\|x\|)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|(f \circ g)(x)\| \leq km \|x\|$

or $\left.\begin{array}{l} k \in [0;1[, \\ m \in [0;1[\end{array}\right\} \Rightarrow km \in [0;1[$ on pose $km = \gamma$

$\exists \gamma \in [0;1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|f \circ g(x)\| \leq \gamma \|x\|$.

De plus $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par composition d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

Alors F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

d) supposons que f est un automorphisme de F.

$\exists k \in [0;1[\, / \, \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|$

montrons la contraposée : supposons que $f^{-1} \in F$.

$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f^{-1}(x)\| \leq k\|x\|$ comme F stable par composition d'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$,

$\|f \circ f^{-1}(x)\| \leq m\|x\| \quad m \in [0;1[$

$\|x\| \leq m\|x\|$ donc $Id \in F$ absurde d'après 3.a).

si f automorphisme de F, f^{-1} n'appartient pas à F.

4.a) supposons que F contient un projecteur non nul P.

on rappelle que $pop = p$.

$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|p(x)\| \leq k\|x\|$ F stable par composition

$\|pop(x)\| \leq m\|x\|$

$\|p(x)\| \leq m\|x\|$

je ne vois pas.

$p \leq 3$

5) f endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

f est diagonalisable. on note A sa matrice representative
Alors comme f diagonalisable, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de f tel que.

$A = PD^tP$ où P matrice orthogonale et
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ valeur propre de f.

$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\|(AX\|^2 &= {}^t(AX)AX \\ &= {}^tX{}^tAAX \\ &= {}^tXPD^tPPD^tPX \\ &= {}^tXPD^2{}^tPX \\ &= {}^t({}^tPX)D^2{}^tPX \quad \text{on pose } Y = {}^tPX \\ &= {}^tYD^2Y \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k^2 \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &\leq \mu \sum_{k=1}^{p} y_k^2 \quad \text{où } \mu = \max(\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \\ &\leq \mu \|X\|^2 \text{ car } \|Y\|^2 = \|X\|^2.\end{aligned}$$

$\|AX\| \leq |\mu|\ \|X\|$ donc $|\mu| = k$.
$\|AX\| \leq k\|X\|$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

6) si $sp(f) \subset]-1;1[\Rightarrow k \in [0;1[$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^3\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

or $k = \max\{|\lambda|, \lambda \in sp(f)\}$ donc $f \in F$.

Copie anonyme - n°anonymat : 142670

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2022

Épreuve de : Maths S

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) supposons que $f \in F$

$\exists k \in [0,1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

si x vecteur propre de f associée à μ.

$$0 \leq \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq k \quad \text{car } \|x\| \neq 0 \text{ (vecteur propre)}$$

$$0 \leq |\mu| \frac{\|x\|}{\|x\|} \leq k$$

$$0 \leq |\mu| \leq k < 1$$

$$\mu \in]-1,1[$$

$$sp(\mu) \subset]-1,1[$$

$f \in F \Rightarrow sp(f) \subset]-1,1[$.

6)
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

donc $A^3 = \dfrac{1}{6^3} \, 9 \times \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{9}{6^3} A$$

$A^3 = \frac{1}{24} A$

$P = X^3 - \frac{1}{24} X$ polynome annulateur de A.

$= X\left(X^2 - \frac{1}{24}\right)$

$sp\, A \subset \left\{0 ; \frac{1}{2\sqrt{6}} ; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right\}$.

b) : A matrice symétrique à valeurs réelles donc A diagonalisable alors A admet au moins une valeur propre.
or $sp(A) \subset]-1 ; 1[$
d'après 5.b), par équivalence $f \in F$.

on peut poser $h = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Exercice 3 :

1. a) $X_i(\Omega) = \{0 ; 1\}$ et $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ et $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Alors $S(\Omega) = \mathbb{N}$.

b) $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ variable de Bernoulli donc admet une espérance. S admet une espérance comme combinaison linéaire de variable admettant des espérances.

2) $\forall n \geq 1$, $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d.

donc d'après le cours $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

$E(S_n) = np$ $V(S_n) = np(1-p)$

3)

$$\forall k \geq 1, \quad P(S=k) = P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(S=k, N=n) \quad \text{(formule des probas totales}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k, N=n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N=n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n = k, N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n = k) P(N=n)$$

car N indépendante des X_i donc S_n et N indépendantes par les coalitions.

or $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ donc il faut que $n \geq k$ sinon $\binom{n}{k} = 0$ par convention.

$$\text{donc } P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k) P(N=n).$$

4) $N-1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(N-1=k) = P(N=k+1) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

on pose $i = k+1$

$i \in \mathbb{N}^*$ $\quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(N=i) = \dfrac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda}.$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(N=i) = \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda}.$$

6) $\forall k \geq 1$,

$$P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k)\, P(N=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n}{(n-k)!} q^{n-k} \lambda^{n-k} \lambda^{k-1}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n (q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}$$

on pose $i = n-k$

$$P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(i+k)(q\lambda)^i}{i!}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} (q\lambda)^i + k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^i}{i!} \right)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^{i+1}}{i!} + k e^{q\lambda} \right)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \left(q\lambda e^{q\lambda} + k e^{q\lambda} \right)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} (q\lambda + k)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} e^{-\lambda p} (q\lambda + k).$$

Copie anonyme - n°anonymat : 142670

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2022
	Épreuve de : Maths S		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) $S(\Omega) = \mathbb{N}$ donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k) = 1$$

$$P(S=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k)$$

or $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!}(\lambda q + k)e^{-\lambda p}$$

$$= \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{k!}(\lambda q + k)$$

$$= \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda}\left(\lambda q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{(k-1)!}\right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda}\left(\lambda q\left(e^{p\lambda} - 1\right) + (p\lambda)e^{p\lambda}\right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda}\left(2e^{\lambda p} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda}$$

donc $P(S=0) = 1 - \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda}\right)$

$E(S/N=n) = np$ car la loi de S conditionnée à $N=n$ est $\mathcal{B}_n$.

$$E(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(S/N=n)P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} np \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$k = n-1$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} \lambda^k + pe^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} \lambda^k + p$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \lambda^{k+1} + p \quad (\lambda > 0).$$

$$= \lambda p e^{-\lambda} e^{\lambda} + p$$

$$= \lambda p + p.$$

$E(N-1) = \lambda$ $\quad E(N) = \lambda + 1$

$E(X) = p$ $\quad E(N)E(X) = (\lambda+1)p$

Ainsi $E(S) = E(X)E(N)$.

5) N=grand(1, 1, 'poi', lambda)$_*$ − 1.

Y=grand(1, n, 'bin', N, p)

Problème :

1) préliminaire :

on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

formule des développements limités !

$$\lim_{x\to 0^+} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 1 \text{ . or } \frac{f(x)}{x} > 0$$

$x \mapsto \ln(x)$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x\to 0^+} |\ln(f(x)) - \ln(x)| = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left|\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} - 1\right| = 0 \qquad \ln(x) \neq 0$$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln f(x)}{\ln(x)} = 1$.

$$\ln f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$$

partie I :

2.a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

$$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{(e^{x} - e^{-x})}{2} = -sh(x)$$

sh impaire.

b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $sh'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh'(x)$		$+$	
$sh(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x}{2}(1 - e^{-2x})$

or $e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$

$1 - e^X \underset{0}{\sim} -X$

donc $1 - e^{-2x} \underset{0}{\sim} 2x$

$\dfrac{e^x}{2}(1 - e^{-2x}) \underset{0}{\sim} \dfrac{e^x \cancel{2} x}{\cancel{2}}$

$\sim x$.

$sh(x) \underset{0}{\sim} x$.

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$ ch paire.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$	$-$	0	$+$
$ch(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

d'après le tableau de variation de sh.

Copie anonyme - n°anonymat : 142670

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Maths

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(sh(x))^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$(ch(x))^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

donc $(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = \frac{1}{4}(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}})$

$$= 1$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1.$

partie II -

5.a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{e^x + e^{-x}}$

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

la fonction $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ ainsi,

th est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$$th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$$

th impaire (d'après la parité de ch et imparité de sh)

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad th'(x) = \frac{sh'(x)\,ch(x) - ch'(x)\,sh(x)}{(ch(x))^2}$

$$= \frac{(ch(x))^2 - (sh(x))^2}{(ch(x))^2} = \frac{1}{(ch(x))^2} > 0.$$

(d'après 4).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$th'(x)$		$+$	
$th(x)$	-1	0	$\nearrow 1$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad th(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}} \; \frac{(1 - e^{-2x})}{1 + e^{-2x}}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} = -1$ car th impaire

6. a) on pose $a = b = 1$.

synthèse : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$= \frac{e^{-x}(1+e^{-x}) + e^{-x}(1-e^{-x})}{1-e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^{-x} + \cancel{e^{-2x}} + e^{-x} - \cancel{e^{-2x}}}{e^{-x}(e^{x} - e^{-x})}$$

$$= \frac{2}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1}{sh(x)}$$

la synthèse est bonne, les réels sont $a = b = 1$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad \dfrac{1}{sh(x)} = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

on pose la fonction $f_1 : x \mapsto \ln\left(1-e^{-x}\right) - \ln(1+e^{-x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad f_1'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{sh(x)}$

Ainsi f_1 est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{sh(x)}$.

partie 3 :

8.a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $k \geq 1$.

$$\forall t \in [k, k+1]$$

$$k \leq t \leq k+1 \quad x > 0 \text{ et } sh \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$sh(xk) \leq sh(tx) \leq sh(x(k+1))$$

$$t \mapsto \frac{1}{t} \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\frac{1}{(k+1)x} \leq \frac{1}{tx} \leq \frac{1}{kx}$$

$k \leq k+1$

$$\Rightarrow \frac{k+1-k}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(xt)} \leq \frac{1}{sh(kx)}$$

$$\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \frac{1}{sh(kx)}$$

b) $\forall n \geq 2$

$$\frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_1^n \frac{dt}{sh(tx)}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^n \frac{dt}{sh(tx)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^n \frac{dt}{sh(tx)} + \frac{1}{sh(x)}.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 142670

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2022

Épreuve de : Maths S.

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et si $n=1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{sh(kx)} \leq \frac{1}{sh(x)}$

D'autre part, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \frac{1}{sh(kx)}$

$\forall n \geq 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$$

$\forall n \geq 1$,

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} dt + \frac{1}{sh(x)}.$$

9. a) calculons la valeur de $\displaystyle\int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} dt$.

on pose $u = tx$

$t \mapsto tx$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

$t = \frac{u}{x} \Rightarrow dt = \frac{du}{x}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\int_1^n \frac{1}{sh(tx)}\,dt = \int_x^{nx} \frac{1}{sh(u)}\frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\int_x^{nx}\frac{du}{sh(u)}$$

$$= \frac{1}{x}\Big[\ln(1-e^{-u}) - \ln(1+e^{-u})\Big]_x^{nx}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln\left(\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\right) + \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\right)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1-e^{-(n+1)(x)}}{1+e^{-(n+1)x}}\right)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{sh(tx)}\,dt = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$

par passage à la limite dans l'inégalité 8.b), il vient que.

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{sh(kx)} \leq \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) + \frac{1}{sh(x)} \quad (1)$$

Ainsi $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{sh(nx)}$ bornée donc elle converge.

b) on remarque que :

$$th\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}}\frac{(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

donc $\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = -\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$

Ainsi d'après l'inégalité (1) on a bien

$\forall x > 0$

$$-\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(kx)} \leq -\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{sh(x)}$$

c) dans l'inégalité de la 9.

$$-\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(kx)} \leq -\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{sh(x)}$$

$$-\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(kx)} \leq \frac{x}{sh(x)} - \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

et en multipliant par $-\frac{1}{\ln(x)}$ (positif et non nul car x très petit

$$\frac{\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)} \leq -\frac{x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(kx)}}{\ln(x)} \leq -\frac{x}{\ln(x)sh(x)} + \frac{\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)}$$

or $sh(x) \underset{0}{\sim} x$

d'où $\frac{-x}{sh(x)} \underset{0}{\sim} -1$

et $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\ln(x)sh(x)} = 0$.

et $\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0}{\sim} \ln(x)$

donc $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)} = 1$

par encadrement,

$$\lim_{x \to 0^+} - \frac{x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{sh(kx)}}{\ln(x)} = 1$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{sh(nx)} \underset{x \to 0^+}{\sim} - \frac{\ln(x)}{x}.$$

10) S = S + 2 / (exp(k*x) - exp(-k*x))
end
disp S.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751