

Mathématiques option scientifique Mathématiques

Note de délibération : 20 / 20

20 / 20

Ecrisme

Épreuve:

mathématique

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

 1 / 12

Numéro de table

10

Exercice 1:

$$\text{Lc. } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad t_k[n] = \frac{x^k}{n!}$$

$$t_{k-1}[n] = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{kx^k}{k!x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$= \frac{k}{x} t_k[n]$$

~~Si $x=0$, pour $k \geq 1$, $t_k[n] = t_{k-1}[n]$~~

$$t_k[n] = \frac{k}{k} t_{k-1}[n], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b. fonction $S = F(n, x)$

$$t = 1 // t = t - 0(x)$$

$$S = ? // S = f(0, x)$$

$$\text{for } k = 1:n$$

$$t = t * (x/k)$$

$$S = S + t$$

end
end fonction

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme fonction polynomiale

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f'_n(x) = \sum_{k=0}^n x \frac{x^{k-1}}{k!} > 0$$

Ainsi, f_n est continue sur \mathbb{R}^+ comme fonction polynomiale et strictement croissante (sa dérivée s'annule uniquement en 0). donc f_n

$$f_n(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

Ainsi f_n réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur $f_n(\mathbb{R}^+) = [1; +\infty]$, donc l'équation $f_n(x) = a$, où $a > 1$, admet une unique solution sur \mathbb{R}^+ notée x_n .

3a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

Donc $v_{n+1} + f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$

Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

car e^x est une série exponentielle convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$$

b. On a $f_{n+1}(v_n) \geq f_n(v_n)$ car $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante

On étudie le signe de

$$v_{n+1} - v_n$$

$$f_n(v_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{v_{n+1}}{k!}$$

c.

lb. $v_n \geq 1, v_n > K$

K est le minorant de v_n donc

$$K \leq h \alpha \quad Q \backslash \alpha$$

$$\frac{e^K \leq \alpha}{\text{par croissance de } e^x \text{ sur } \mathbb{R}}$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad Q \backslash \alpha$

Or $f_n(v_n) = \alpha$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(v_n) =$

Cette feuille est à l'usage des lauréats du concours.

5a. v_n est minorée par K , et étant croissante elle converge donc admet une limite finie en $+\infty$. Cette limite est la dérivée gac.
Ainsi, (v_n) est bornée

b. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$

$$R_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} e^t \frac{(\alpha-t)^n}{n!} dt$$

la fonction $\alpha \mapsto R_n(\alpha)$ est C^∞ sur \mathbb{R}^+ comme la fonction composée dans d'après le formulaire de Taylor avec reste intégrable à l'ordre n où $v_n \in \mathbb{R}^+$ en $[0; v_n]$:

$$e^{v_n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} v_n^k + \int_0^{v_n} \frac{(v_n-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

or $f^{(n+1)}(t) = e^t$

$$e^{u_n} = \sum_{k=0}^n \frac{u_n^k}{k!} + \int_0^{u_n} \frac{(u_n-t)^n}{n!} e^t dt$$

Or d'après la formule de Taylor-Lagrange
(l'hégalité)

à l'ordre n à la fonction $x \mapsto e^x$
en $[0; u_n]$:

$$\left| e^{u_n} - \sum_{k=0}^n \frac{u_n^k}{k!} \right| \leq \sup_{x \in [0; u_n]} |e^x| \frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left| \int_0^{u_n} \frac{(u_n-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \sup_{x \in [0; u_n]} |e^x| \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

* La fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est croissante sur \mathbb{R}^+
donc $(u_n)^{n+1} \leq M^{n+1}$

Or $\begin{cases} |u_n| \leq M \\ e^{u_n} \leq c^M \end{cases}$ } croissance de
exp sur \mathbb{R}

Admettons, $\left| \int_0^{u_n} \frac{(u_n-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$

5c. On multiplie l'inégalité précédente par $n^2 \geq 0$,

$$0 \leq n^2 |R_n(v_n)| \leq n^2 e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'enveloppe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 |R_n(v_n)| = 0$$

$$\text{donc } R_n(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

6a. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, f(z) \rightarrow e^z$ est $C^n(\mathbb{C})$

d'après la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n en $[0; z]$.

$$e^z = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\text{Or } \forall t \in [0, n+1], f^{(n+1)}(t) = e^t = 1$$

$$f^{(n+1)}(t) = e^t$$

$$\text{dans } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

$$\underline{e^x = f_n(x) + R_n(x)}$$

b. Evaluons la dernière égalité en $x=0$:

$$e^{u_n} = a + R_n(u_n)$$

$$\text{or } R_n(u_n) \stackrel{+\infty}{\rightarrow} 0 \left(\frac{1}{n^2} \right) \text{ Q5c}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln a \quad \text{Q4c}$$

$$\text{done il vaut } u_n = \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7a. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$e^x = f_n(t) + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

$$= f_n(x) + \int_0^x e^t \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{n!}$$

$$\text{Posons } v(t) = e^t \quad v'(t) = e^t$$

$$v''(t) = (x-t)^n \quad v'(t) = -\frac{1}{n+1} (x-t)^{n+1}$$

20/20

Ecricome Épreuve: mathématique

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 3 / 12

Numéro de table 10

u et v sont C¹ sur [0; x] donc par intégration par parties:

$$e^x = f_n(x) + \left[-\frac{1}{(n+1)n!} (x-t)^{n+1} \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^t (x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

b. On évalue en x = u_n:

$$e^{u_n} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

On sait que |R_n(u_n)| ≤ e^{u_n} $\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ Q51

~~$$\int_0^{u_n} e^t (u_n-t)^{n+1} dt$$~~

c. On sait que $v_n \stackrel{+∞}{=} \ln a + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\text{donc } v_n \stackrel{+∞}{\sim} \ln a$$

$$v_n^{n+1} \stackrel{+∞}{\sim} (\ln a)^{n+1}$$

$$\frac{v_n^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{+∞}{\sim} \frac{(\ln a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

~~On sait que $\forall a \in \mathbb{R}, \lim \frac{x^n}{n!}$~~

Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

$$\text{donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

car 2 formes équivalentes ont même limite.

d.

Exercise 2:

1a. Sei $I \in M_3(\mathbb{R})$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3-h_1}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist triangulär mit Null auf der Diagonale, alle drei Zeilen sind linear abhängig.

Aber $A + I$ ist nicht invertierbar

$$-I \in \text{Sp}(A)$$

$$\text{i.e. } -I \in \underline{\text{Sp}(f)}.$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad 2L_3 + L_1$$

avec le même argument on trouve que

$A - 2I$ est non inversible

donc $2 \in \text{Spl}(A)$

$2 \in \text{Spl}(f)$

Sont $X \in M_{3,1}(\mathbb{C})$, non nul

$$AX = -X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = -x \\ 2y = -y \\ x + 4y - 2z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \quad X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Commencez à composer dès la première page.

$$\text{Ainsi, } E_{-1}(t) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-1}(f) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sait $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, non nul

$$AX = 2X$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \gamma - 2 &= 2x \\ 2\gamma &= 2y \\ x + 4y - 2z &= 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2x + z \\ \gamma = y \\ x + 4(2x + z) = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2x + z \\ \gamma = y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \gamma = 2x + z \\ \gamma = y \\ x = 0 \end{cases} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \begin{cases} \gamma = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_2(f) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

b. Supposons f diagonalisable.

$$\operatorname{tr}(A) = 0$$

Or la somme des valeurs propres de A
n'est pas égale à 0.

~~donc de plus la somme des déterminants des sous-espaces vectoriels ne va pas pas 3.~~

donc on a f qui n'est pas diagonalisable.

~~On peut en déduire que f est un endomorphisme n'ayant~~

2. Soit $X \in \operatorname{Ker}(A + \operatorname{Id}) = E_-(A)$

Soit $\alpha \in \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$

$$\begin{aligned} (f + \operatorname{Id})(\alpha) &= 0 \\ f(\alpha) &= -\alpha \end{aligned}$$

$$\text{On a } x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2A + I$$

A et I
commutent

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2A + I$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Se conserve
le résultat
pour le reste

$$(f + id)^2 [x] = f^2(x) + 2f(x)x + x$$

f et id
commutent

$$x \in \text{Ker}(f+id) \Leftrightarrow f(-x) + (-2x) + x = 0$$

$$f \text{ est linéaire} \Leftrightarrow -f(x) - x = 0$$

$$\text{donc } x \in \text{Ker}((f+id)^2)$$

$$\text{Ainsi } \text{Ker}(f+id) \subset \text{Ker}((f+id)^2)$$

On sait que $\text{Ker}(f + \text{id}) = \text{Ker}(A + I)$

or $\dim(E_{-1}(A)) = 1$

Par calcul on a si $x \in \text{Ker}((A + I)^2)$:

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 9x \end{pmatrix}$$

Supposons $\text{Ker}(f + \text{id}) = \text{Ker}((f + \text{id})^2)$

Alors $x \in \text{Ker}((f + \text{id})^2)$

raisonnons par
l'absurde

$$\text{i.e. } f^2(x) + 2f(x) + x = 0$$

$$f(-x) + 2f(x) + x = 0$$

$$f(x) + x = 0$$

20 / 20

 Ecrimage Épreuve: math

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 5 /

Numéro de table 10

Comment gérer la composition dès la première page

3. On sait que $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) = 1$ q/a
parce que $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) \neq \dim(\text{Ker}((f + \text{id})^2))$
et $\text{Ker}(f + \text{id}) \subset \text{Ker}((f + \text{id})^2)$

alors $\dim \text{Ker}((f + \text{id})^2) \geq 2$

Or $\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) = \dim E_2(f)$
 $= 1$

Si $\dim(\text{Ker}((f + \text{id})^2)) = 3$

alors $\text{Ker}((f + \text{id})^2) = \mathbb{R}^3$
(car inclus puis dans \mathbb{R}^3 car c'est un
sous-espace vectoriel)

Ce qui est absurde, donc $\dim(\text{Ker}((f + \text{id})^2)) \leq 2$

Montrons que $\text{Ker}(f - 2\text{id}) \cap \text{Ker}((f + \text{id})^2) \subset \{0_{\mathbb{A}^2}\}$

Soit $x \in \text{Ker}(f - 2\text{id}) \cap \text{Ker}((f + \text{id})^2)$

$$\text{i.e. } f(x) = 2x$$

$$\text{i.e. } f^2(x) + 2f(x) + x = 0$$

$$\text{donc } f^2(x) + 5x = 0$$

$$\text{or } f^2(x) = f(2x) = 2f(x) = 4x$$

$$\text{on obtient } 9x = 0$$

$$x = 0$$

Ainsi, $\text{Ker}(f - 2\text{id}) \cap \text{Ker}((f + \text{id})^2) \subset \{0_{\mathbb{A}^2}\}$

or $\{0\} \subset \text{Ker}(f - 2\text{id}) \cap \text{Ker}((f + \text{id})^2)$

Dans ce cas : $\text{Ker}(f - 2\text{id}) \oplus \text{Ker}((f + \text{id})^2)$

$$\text{Or dam } (\ker(f - 2\text{id}) + \ker((f + \text{id})^2)) \\ = 2 + 1 = 3$$

D.h. plus, $\ker(f - 2\text{id}) \oplus \ker((f + \text{id})^2) \subset \mathbb{R}^3$

Wir wissen: $\underline{\ker(f - 2\text{id}) \oplus \ker((f + \text{id})^2) = \mathbb{R}^3}$

h. Montrons que $\forall x \in F, f(x) \in F$
 $\forall y \in G, f(y) \in G$

Seit $x \in F, f(x) = 2x$

$$f((f(x) - 2x)) = f^2(x) - 2f(x) \\ = f(2x) - 4x = 0$$

dans ~~F~~ F est bien stable par f.
 car $f(x) \in F$

Seit $y \in G, (f + \text{id})^2(y) = 0$
 $f^2(y) + 2f(y) + y = 0$

Montrons que $f(f^2(y) + 2f(y) + y) = 0$

$$\Leftrightarrow f^3(y) + 2f^2(y) + f(y)$$

$$\Leftrightarrow f^3(y) + 2(-y - 2f(y)) + f(y)$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow f^3(y) - 2y - 3f(y) = \\
 &= f(-2f(y) - y) - 2y - 3f(y) \\
 &\Leftrightarrow -4f(y) - 2f^2(y) - 2y \\
 &\Leftrightarrow -2(-2f(y) - y) - 4f(y) - 2y = 0 \\
 &\text{dans } f(y) \in G
 \end{aligned}$$

G est stable par f .

5. $P(f) = (f + id)^2 (f - 2id)$

Montrons que $P(A) = 0$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{résultat Q2})$$

$$\begin{aligned}
 (A + I)^2 \times (A - 2I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -a \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dans $P(A) = 0$

Alors: $P(f)$ est l'endomorphisme nul

 Ecrimage Épreuve: macth

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille G / 12

Numéro de table 10

Commencez à composer dès la première page

6. Montrons que $\pi_1 \circ \pi_2 = \bar{\pi}_2 \circ \bar{\pi}_1$

$$\begin{aligned}\pi_1 \circ \pi_2 &= \frac{1}{g} (f + id)^2 \circ \left(-\frac{1}{g}(f + id)\right) \circ (f - 2id) \\ &= -\frac{1}{81} (f + id)^2 \circ (f + id) \circ (f - 2id)\end{aligned}$$

On sait que l'id. et les puissances de f commutent donc.

~~$$\pi_2 \circ \pi_1 = -\frac{1}{81} (A + 4I) \times (A + I)^2 (f)$$~~

$$\underline{\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \pi_2}$$

$$7a. \pi_2 \circ \pi_1 = -\frac{1}{81} (A + 4I)(A - 2I)(A + I)^2$$

$$\text{Or } (A - 2I)(A + I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{done } \underline{\pi_2 \circ \pi_1 = 0}$$

b. On a $\forall x \in \mathbb{A}^3$, $\bar{\alpha}_2 \circ \bar{\alpha}_1(x) = 0$

$$\bar{\alpha}_1(x) \in \text{Im}(\bar{\alpha}_2)$$

$$\text{et } \bar{\alpha}_1(x) \in \text{Ker}(\bar{\alpha}_2)$$

Alors $\underline{\text{Im}(\bar{\alpha}_1) \subset \text{Ker}(\bar{\alpha}_2)}$

$$8a. \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \frac{1}{g} (f + id)^2 - \frac{1}{g} (f + 4id)(f - 2id)$$

$$= \frac{1}{g} (f^2 + 2f + id) - \frac{1}{g} (f^2 - 2f + 4f - 8id)$$

$$= \frac{1}{g} (f^2 + 2f + id) - \frac{1}{g} (f^2 + 2f - 8id)$$

$$= \frac{1}{g} id + \frac{8}{g} id$$

$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = id$

b. $\forall x \in \mathbb{A}^3$, $\bar{\alpha}_1(x) = x - \bar{\alpha}_2(x)$

$$x - \bar{\alpha}_2(x) \in \text{Im}(\bar{\alpha}_1)$$

si $\alpha \in \text{Ker}(\pi_2)$, alors $\alpha \in \text{Im}(\pi_1)$

$$\text{done } \underline{\text{Ker}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)}$$

g. Par double inclusion on obtient :

$$\underline{\text{Ker}(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)}$$

On a $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$

$$\text{done } \pi_1 \circ \pi_2 (\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}^B$$

$$\text{alors } \pi_2(\alpha) \in \text{Ker}(\pi_1)$$

$$\text{or } \pi_2(\alpha) \in \text{Im}(\pi_2)$$

$$\underline{\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Ker}(\pi_1)}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{A}^B, \pi_1(\alpha) + \pi_2(\alpha) = \alpha$$

$$\text{done } \alpha - \pi_1(\alpha) \in \text{Im}(\pi_2)$$

si $\alpha \in \text{Ker}(\pi_1)$, on obtient :

$$\underline{\text{Ker}(\pi_1) \subset \text{Im}(\pi_2)}$$

$$\underline{\text{Ker}(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)}$$

10. On sait que $\begin{cases} \bar{U}_1 \circ \bar{U}_2 = \bar{U}_2 \circ \bar{U}_1 = 0 \\ \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = \text{id} \end{cases}$

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{3} (A + I)^2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^2 &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81} (A + I)^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \underline{\bar{U}_1^2 = \bar{U}_1}$$

de même on obtient après calcul que

$$\bar{U}_2^2 = \bar{U}_2 :$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 &= -\frac{1}{3} (A + 4I)(A - 2I) \\ &= -\frac{1}{3} (A^2 - 2A + 4A - 8I) \\ &= -\frac{1}{3} (A^2 + 2A - 8I) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} - 8I \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} -8 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & -11 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On trouve bien $\bar{U}_2^2 = \bar{U}_2$

Ainsi, \bar{U}_1 et \bar{U}_2 sont des projecteurs associés.

20 / 20

 Ecricom Épreuve: Math

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 

Numéro de table 

Cocher toutes les cases de la première page

71.  On sait que tout projecteur T_2 réalise une projection sur $\text{Im}(T_2)$ parallèlement à $\text{Ker}(T_2)$
 $\text{or } \text{Im}(T_2) = \text{Im}((f + \lambda \text{id})(f - 2\lambda \text{id}))$
 $= \text{Ker}(T_2) \quad (\& g)$
 $= G = \text{Ker}((f + \lambda \text{id})^2)$

$$\text{Ker}(T_2) = F$$

Ainsi T_2 est le projecteur sur G parallèlement à F .

Puisque T_1 et T_2 sont des projecteurs associés alors T_1 est le projecteur sur F parallèlement à G .

$$\cancel{72. \ g(f) = (2T_1 - T_2)(f) = 2T_1(f) - T_2(f)}$$

2

$$\text{Q. } g = 2\pi_1 - \pi_2$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}(f+id)^2\right) + \frac{1}{3}(f+id)(f-2id)$$

Par Posant $Q(f) = g$: on a bien g qui est un polynôme de l'endomorphisme f car somme de puissances de f et de l'id.

$$h = f - g$$

$R(f) = h$: on conclut de la même manière.

$$\text{B. } g = 2\pi_1 - \pi_2$$

g est un projecteur comme somme de 2 projecteurs. Or $S_p(\pi_1) = S_p(\pi_2) \subset \{0; 1\}$

$$\text{donc } S_p(g) \subset \{-1; 2\}$$

Soit ~~$x \in \mathbb{A}^3$~~

~~$$g(x) = -x \Leftrightarrow (2(\pi_2 \cdot id) - \pi_2)(x) = -x$$~~

\mathfrak{I}' admet que $S_p(g) = \{2; -1\}$

et que $\dim E_{-1}(g) = 2$

$\dim E_2(g) = 1$ g est donc diagonalisable.

Donc dans une base de \mathbb{C}^3 on a bien la matrice de g base
famille des vecteurs propres de g telle que elle soit égale à $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. $h = f - g$ $h \in \mathfrak{g}$

$$h = f - 2 \left(\frac{1}{5} (f + \text{id})^2 \right) + \frac{1}{5} (f + h \cdot \text{id}) (f - 2 \cdot \text{id})$$

\mathfrak{I}' admet le résultat.

15. On a $f = h + g$ d'après l'énoncé

or h est un endomorphisme nilpotent car

$h^2 = 0$ et g est diagonalisable d'après Q13

Ainsi, f est bien la somme de 2 endomorphismes
dont l'un est diagonalisable et l'autre
nilpotent.

Problème Partie 1

a. $F_{\nu/a}$ est C^2 sur \mathbb{R} comme composée

de composée de fonctions C^2 sur \mathbb{R} :

en effet, $\alpha: x \mapsto e^{\frac{\nu-x}{a}}$ est C^2 sur \mathbb{R}
car $\alpha \neq 0$ et $\alpha': x \mapsto \exp(-e^{\frac{\nu-x}{a}})$ est
 C^2 sur \mathbb{R} par composition.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\nu/a}(x) = e^{-x} e^{\frac{\nu-x}{a}}$$

$$f_{\nu/a}(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{\nu-x}{a}} \times e^{-x} e^{\frac{\nu-x}{a}}$$

$$f_{\nu/a}'(x) = -\frac{1}{a^2} e^{\frac{\nu-x}{a}} \times e^{-x} e^{\frac{\nu-x}{a}} + \left(\frac{1}{a} e^{\frac{\nu-x}{a}}\right)^2 e^{-x} e^{\frac{\nu-x}{a}}$$

$$= \frac{1}{a^2} e^{\frac{\nu-x}{a}} e^{-x} e^{\frac{\nu-x}{a}} \left(e^{\frac{\nu-x}{a}} - 1\right)$$

b. Puisque $a > 0$, on a $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
alors, $F_{\nu/a}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}

20 / 20

 Ecrimage Épreuve: Math.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 8 / 12

Numéro de table 10

Commencez à composer dès la première page

$$\int_{\mu/\alpha}^x f_{\mu/\alpha}(u) du = \frac{1}{\alpha^2} e^{\frac{\mu-x}{\alpha}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{\alpha}}} \left(e^{e^{\frac{\mu-x}{\alpha}}} - 1 \right)$$

Etudions

$$e^{e^{\frac{\mu-x}{\alpha}}} - 1 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

$$e^{e^{\frac{\mu-x}{\alpha}}} - 1 \geq 0$$

$$\frac{\mu-x}{\alpha} \geq 0 \quad \begin{cases} \text{croissance de} \\ \log \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$\mu - x \geq 0 \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ x \leq \mu \end{cases}$$

$$x < \mu$$

donc le terme $e^{e^{\frac{\mu-x}{\alpha}}} - 1$ est positif
sauf que lorsque $x < \mu$

Ainsi sur $]-\infty; \mu]$, $f_{\mu/\alpha}(x) \geq 0$ donc
 $F_{\mu/\alpha}$ est convexe.

Sur $[\mu; +\infty[$, $f_{\mu/\alpha}(x) \leq 0$, $F_{\mu/\alpha}$ est concave

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (\alpha > 0)}} \frac{\mu - x}{\alpha} = -\infty \quad \text{dene par composition,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\mu - x}{\alpha}} = 0$$

Par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-e^{\frac{\mu - x}{\alpha}}\right) = 1$

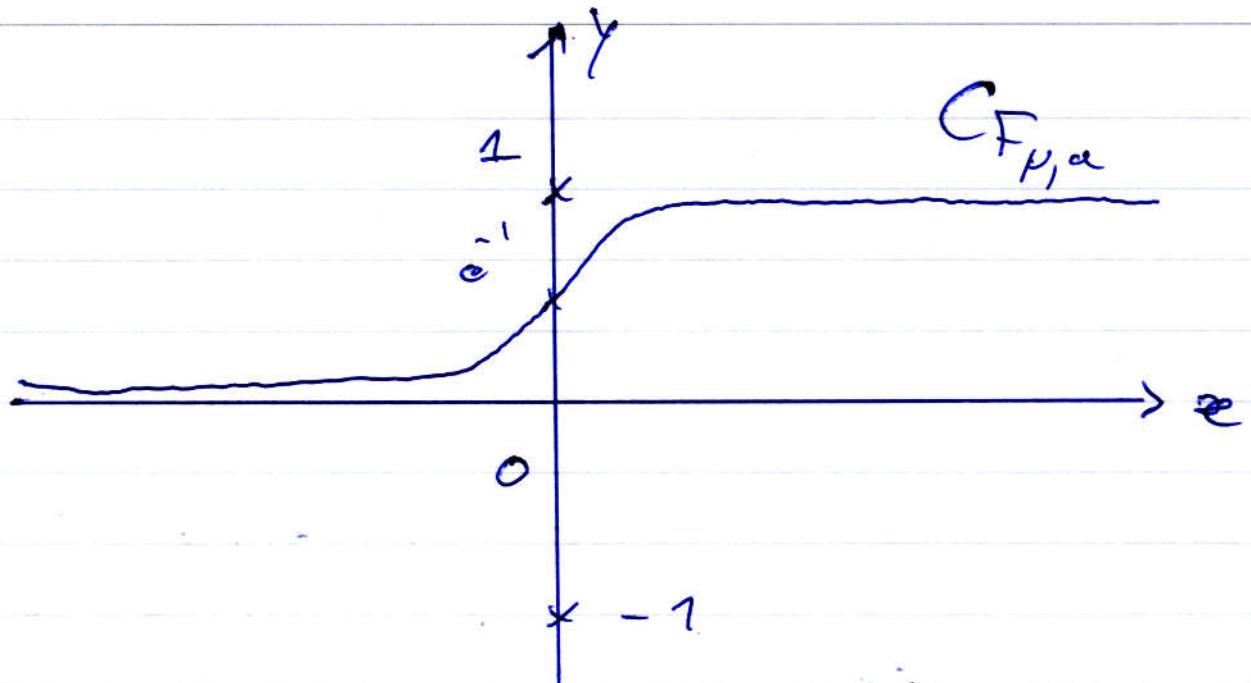
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 1$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\mu - x}{\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\mu - x}{\alpha}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{\frac{\mu - x}{\alpha}} = -\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 0 \quad \text{par composition}$$

le point d'inflexion de F est le point où F change de convexité : c'est donc $x = \mu$



le point d'inflexion est ~~$(\mu, F_{\mu, \alpha}(\mu))$~~
 i.e. $(\mu; c^{-1})$ on a $c^{-1} < 1$

c. $F_{\mu, \alpha}$ est continue et strictement croissante

$$\text{Sur } \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 0$$

donc $\underline{F_{\mu, \alpha}}$ réalise une bijection de

\mathbb{R} sur $]0; 1[$.

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, F_{0,1}(x) = e^{-e^{-x}} = e^{-e^{-x}}$$

Soit $y \in]0; 1[$, résolvons $F_{0,1}(x) = y$

d'inconnue : α

$$e^{-\alpha} = x$$

$$e^{-\alpha} = y \Rightarrow$$

$$-\alpha = \ln y \quad \ln y < 0$$

$$-\alpha = -\ln y \quad \downarrow$$

$$-\alpha = \ln(-\ln y) \quad \begin{matrix} -\ln y > 0 \\ \text{car } y \in]0; 1[\end{matrix}$$

$$\alpha = -\ln(-\ln y)$$

$$\underline{F_{\mu, \alpha}^{-1}(x) = -\ln(\ln \frac{1}{x})}$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu, \alpha}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\left(\frac{\mu-x}{\alpha}\right)} x e^{-e^{\left(\frac{\mu-x}{\alpha}\right)}}$$

$f_{\mu, \alpha}$ est continue sur \mathbb{R} car $F_{\mu, \alpha}$ est

C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De plus $f_{\mu, \alpha}$ est strictement positive sur \mathbb{R} car $\frac{1}{\alpha} > 0$ et l'exponentielle est toujours positive.

Etudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu, \alpha}(\alpha) d\alpha$.

L'intégrale est impropre sur $+\infty$ et $-\infty$.

 Ecrimage

Épreuve : Math

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille

9 / 12

Numéro de table

10

Commencez à composer dès la première page

$$\text{Etudions } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} e^{\left(\frac{\nu-x}{a}\right)} e^{-e^{\left(\frac{\nu-x}{a}\right)}} dx$$

Soit $A > B$,

$$\int_B^A \frac{1}{a} e^{\left(\frac{\nu-x}{a}\right)} x e^{-e^{\left(\frac{\nu-x}{a}\right)}} dx = \left[e^{-e^{\left(\frac{\nu-x}{a}\right)}} \right]_B^A$$

$$= e^{-e^{\left(\frac{\nu-A}{a}\right)}} - e^{-e^{\left(\frac{\nu-B}{a}\right)}}$$

$$\text{d'après q1b, } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-e^{\left(\frac{\nu-A}{a}\right)}} = 1$$

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} e^{-e^{\left(\frac{\nu-B}{a}\right)}} = 0$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\nu, a}(x) dx = 1$$

$f_{\nu, a}$ est bien une densité de probabilité.

$F_{\mu, \alpha}$ est la primitive de $f_{\mu, \alpha}$, de plus
 $F_{\mu, \alpha}$ est C^1 sur \mathbb{R} , strictement croissante et
 continue sur \mathbb{R} et ~~est~~ une bijection de

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 0$$

Ainsi, $F_{\mu, \alpha}$ est bien la fonction de répartition
associée.

3. $Z \in \mathcal{E}(0, 1)$

On a $F_Z(x) = e^{-e^{-x}}$ d'après Q1c

$$f_Z(x) = e^{-x} \times e^{-e^{-x}}$$

On a donc par construction linéaire:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\alpha} f_Z\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)} e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)}}$$

donc on trouve bien la densité de η_2

$$\underline{X_G \quad g(\nu, a)}$$

$$\text{h.a. } U(\Omega) =]0; 1[$$

$$(-\ln U)(\Omega) = \mathbb{R}_*$$

$$(\ln(-\ln U))(\Omega) = \mathbb{R}$$

$$(-\ln(-\ln U))(\Omega) = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-\ln(-\ln U) \leq x)$$

$$\begin{aligned} &= P(\ln(-\ln U) \geq -x) \\ \text{croissance du log sur } \mathbb{R}_* &\quad \downarrow = P(-\ln U \geq e^{-x}) \\ &= P(\ln U \leq -e^{-x}) \end{aligned}$$

$$\text{car } e^{-x} \in]0; 1[\quad \downarrow = P(U \leq e^{-x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \downarrow = e^{-e^{-x}}$$

$$\text{et } F_U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in]0; 1[\\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = e^{-e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}}$$

Donc γ sont bien les loi de Gumbel de paramètres

(0; 1).

b. fonction $g = \text{gumbel}(\mu, \alpha)$
 $v = \text{rand}()$
 $z = -\log(-\log(v))$
 $g = \alpha^* z + \mu$
end function

5a. L'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln v) e^{-v} dv$ est impropre
en 0 et $+\infty$ car $v \mapsto (\ln v) e^{-v}$ est
continue sur $[0; +\infty]$. La fonction est négative
sur $[0; 1]$.
- $(\ln v) e^{-v} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \ln v < 0 \quad \forall v \in [0; 1]$

or $\int_0^1 \ln v dv$ est une intégrale
convergente qui vaut -1. (primitive $v \mapsto -\ln v - v$)

Dans par critère d'équivalence sur les intégrales
de fonctions de signe constant (ici négatif)

$\int_0^1 e^{-v} \ln v dv$ converge.

Sur $[1; +\infty]$, $v \mapsto (\ln v) e^{-v}$ est positive
 \ln est concave donc $\ln x \leq x$ $\frac{1}{x} \leq e^{-x}$

$\forall v \in \mathbb{R}^*, 0 < (\ln v) e^{-v} \leq e^{-v} v > 0$.

Or $\int_0^{+\infty} e^{-v} v dv$ converge (fonction gamma)

20 / 20

 Ecricom

Épreuve :

math

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille

F	0	/	1	2
---	---	---	---	---

Numéro de table

1	0
---	---

Chacun peut remplir ses deux premières pages.

donc par critère de majoration sur les intégrales de la forme générale fonction positive

$$\int_1^{+\infty} (\ln v)^{-v} dv \text{ converge.}$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} (\ln v)^{-v} dv \text{ converge}$

b. On pose $t = e^{-v}$: le changement est bijectif car la fonction $v: \rightarrow e^{-v}$ est C^1 sur \mathbb{R}^+ et bijective.

$$dt = -e^{-v} dv$$

$$-v = \ln t$$

$$v = -\ln t$$

$$dt = -t dv$$

$$dv = \frac{dt}{-t}$$

Lorsque $v \rightarrow +\infty$ on a $t \rightarrow 0$
 $v \rightarrow 0$ on a $t \rightarrow 1$

$$\int_0^{+\infty} (\ln v) e^{-v} dv = - \int_1^0 \ln(-\ln t) \frac{t}{t} dt \\ = \int_0^1 \ln(-\ln t) dt$$

puisque $\int_0^{+\infty} (\ln v) e^{-v} dv$ converge alors on a bien $\int_0^1 \ln(-\ln t) dt$ qui converge.

c. $Z \in \mathcal{E}(0; 1)$. $\int_2^\infty g(x) = e^{-x} \tilde{e}^{-x}$ Voir ch

2 admet une espérance

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} \tilde{e}^{-x} dx \text{ converge absolument}$$

On pose $v = \exp(-\exp(-x))$: le changement est l'aire sur la fonction

$x \mapsto \exp(-\exp(-x))$ est bijective et C^1 sur \mathbb{R} ($Q1_a$).

$$\ln v = -e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = -\ln v \Leftrightarrow -x = \ln(-\ln v)$$

$$x = -\ln(-\ln u)$$

$$dx = e^{-x} e^{-e^{-x}} dx$$
$$du = u(-\ln u) du$$

Pour $x \rightarrow \infty \quad u \rightarrow 1$
 $x \rightarrow -\infty \quad u \rightarrow 0$

$$dx = \frac{1}{-u \ln u} du$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} x e^{-e^{-x}} dx$ et $-\int_0^1 u \ln u$

$-\int_0^1 -\ln u \times u \times \frac{1}{-u \ln u} \ln(-\ln u) du$ sont de

même nature et en cas de convergence
sont égales.

Or la seconde vaut $-\int_0^1 \ln(-\ln u) du = \gamma$
d'après Q5b: donc elle converge.

Ainsi on a égalité entre les 2 intégrales

donc 2 admet une espérance:

et $E(2) = \gamma$

d. $E(X) = E(aZ + \mu) = aE(Z) + \mu$

par linéarité
de l'espérance

$E(X) = a\gamma + \mu$

donc X admet une espérance.

6a. $Z \in \mathcal{C}(0, 1)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_2(x) = \frac{1}{|x|} \cdot f_{0,1}\left(\frac{x}{|x|}\right) = f_{0,1}(|x|)$$
$$= e^{|x|} \times e^{-e^{|x|}}$$

Par construction linéaire, la variable $-Z$ est une variable à densité.

b. L'intégrande $v \mapsto ve^{-(e^{-v}+1)v}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et positive.

L'intégrale est propre en $+\infty$.

$$(e^{-v}+1)v \geq v \quad \text{car } e^{-v}+1 \geq 1$$

$$-(e^{-v}+1)v \leq -v$$

$$0 \leq \exp(-(e^{-v}+1)v) \leq \exp(-v)$$

$$0 \leq ve^{-(e^{-v}+1)v} \leq ve^{-v}$$

Or $\int_0^{+\infty} ve^{-v} dv$ converge (fonction gamma)

par critère de majoration sur les intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} ve^{-(e^{-v}+1)v} dv$ de converge.

 Ecrcome Épreuve : MATH

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 71/12

Numéro de table 10

Demandez à un proche de la même page

$$\text{Posons } y = -(e^{-x} + 1) v$$

$$dy = (e^{-x} + 1) dv$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} v e^{-y} (e^{-x} + 1) v dv &= \int_0^{+\infty} \frac{y}{e^{-x} + 1} x e^{-y} \frac{1}{e^{-x} + 1} dy \\ &= \frac{1}{(e^{-x} + 1)^2} \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{(e^{-x} + 1)^2} T(2) \\ &= \frac{1}{(e^{-x} + 1)^2} \end{aligned}$$

c. Posons $v = e^t$: $t \mapsto e^t$ est bijection de \mathbb{C}^* sur \mathbb{A} .

$$\begin{aligned} t \rightarrow +\infty, \quad v \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty, \quad v \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$dv = e^t dt \quad \text{or} \quad hv = t$$

$$\cancel{dt} = \frac{dv}{hv} \quad dt = \frac{dv}{v}$$

$$f_{0,1}(x-t) = e^{-x+t} e^{-e^{-x+t}}$$

$$g(t) = e^t \times e^{-e^t}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt &= \int_0^{+\infty} ux e^{-u} \times e^{-x} xu x e^{-e^{-x} x - u} \frac{du}{v} \\ &= e^{-x} \times e^{-e^{-x}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-2u} \frac{du}{v} \\ &= e^{-x} \times e^{-e^{-x}} \int_0^{+\infty} ue^{-2u} du \end{aligned}$$

Or $\int_0^{+\infty} ue^{-2u} du$ est une intégrale

convergente (après changement de variable $z=2u$
on se ramène à une fonction gamma)

Donc par produit avec un réel, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt$
converge.

d. γ et z sont indépendantes lors d'après le
casse les conditions γ et z sont
indépendantes.

On obtient une densité pour le produit de
convolution.

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\gamma,z}(x-t) g(t) dt$$

Partie II:

$$\text{Fa. } \| \alpha V_n + \beta W_n \| = \| \alpha V_n - V - W + \beta W_n \| \\ = \| \alpha V_n - V - \|.$$

$$b. \quad E(M_n) = \frac{1}{n}(ay + \mu) = ay + \mu = E(X_1)$$

les (X_i) ont toutes même espérance.

$$\begin{aligned} V(M_n) &= \frac{1}{n} V(X_1) \quad \text{car elles sont} \\ &\quad \text{independantes.} \\ &= \frac{1}{n} \times a^2 c \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(M_n) = 0$$

$$\text{donc } \underline{M_n \xrightarrow{\text{P}} E(X_1)}$$

$$\begin{aligned} E(C_n) &= E((X_1)^2) = V(X_1) + (E(X_1))^2 \\ &= a^2 c + ay + \mu \end{aligned}$$

$$V(C_n) = \frac{1}{n} V(X_1^2)$$

$\alpha \beta(X_i)$ admet un moment d'ordre 2,

donc $V(X_1^2)$ existe : c'est un réel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(C_n) = 0$$

20 / 20

 Ecricomme Épreuve: Math

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 12 / 12

Numéro de table 10

$$\text{Donc } C_n \xrightarrow{P} E((X_1)^2)$$

$$\begin{aligned} c. \quad V(A_n) &= \frac{1}{C} V(\sqrt{C_n - M_n^2}) \\ &= \frac{1}{C} V\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \frac{\bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_n^2}{n^2}}\right) \\ &= \frac{1}{C} V\left(\sqrt{\frac{(n-1) \sum_{k=1}^n x_k^2}{n^2}}\right) \end{aligned}$$

A_n est une somme de 2 estimateurs c'est donc un estimateur. J'admet le résultat

$$d. \quad \text{On a } A_n \xrightarrow{P} a$$

$$y A_n \xrightarrow{P} ya$$

$$M_n \xrightarrow{P} E(X_1) = \alpha y + \mu$$

$$\text{D'après q } \forall a \text{ on a } M_n - A_n y \xrightarrow{P} \mu$$

$$S_n \xrightarrow{P} \mu$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

S_n est un estimateur convergent de $\alpha \cdot \nu$

8c. fonction $A = \text{estimateur} - \alpha(X)$

8b. les estimateurs t_n semblent converger vers 1 ; ce qui est cohérent avec le résultat de Q7c car $\alpha > 1$.