Copie anonyme - n°anonymat : 691024

D1-00125 691024 Maths E

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 30 **Session :** 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) Linéarité :

Soit $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M_1 + \mu M_2) &= J(\lambda M_1 + \mu M_2) - (\lambda M_1 + \mu M_2)J \\ &= \lambda J M_1 + \mu J M_2 - \lambda \cancel{J} M_1 J + \mu M_2 J \\ &= \lambda(JM_1 - M_1 J) + \mu(JM_2 - M_2 J) \\ &= \lambda \varphi(M_1) + \mu \varphi(M_2).\end{aligned}$$

Donc $\forall (M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$\varphi(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda \varphi(M_1) + \mu \varphi(M_2)$.

Donc φ est linéaire.

Ensuite, comme $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il vient que $JM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $MJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'où $JM - MJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'où $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

2.a)
$$\begin{aligned}\varphi(K_1) &= JK_1 - K_1 J \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{K_3 - K_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(K_2) &= J K_2 - K_2 J \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{K_4 - K_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(K_3) &= J K_3 - K_3 J \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{K_1 - K_4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(K_4) &= J K_4 - K_4 J \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{K_2 - K_3}
\end{aligned}$$

B) Pour construire A dans (K_1, K_2, K_3, K_4), il suffit, comme on l'a fait à la question précédente, de déterminer les coordonnées de φ dans la Base (K_1, K_2, K_3, K_4). Les colonnes de A sont ainsi constituées de ces coordonnées. Et donc, d'après la question précédente, on a :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) On remarque que A est diagonalisable car symétrique. Comme c'est la matrice de φ dans (K_1, K_2, K_3, K_4), on en conclut que :
$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

3.a) On effectue un pivot de Gauss sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir échelonné la matrice de A, on remarque que deux lignes sont nulles, les deux autres étant non nulles.

D'où $\boxed{rg(A) = 2}$

Comme A est la matrice de φ dans (K_1, K_2, K_3, K_4), alors on peut dire que $\dim(Im(\varphi)) = 2$.

Or, (K_1, K_2, K_3, K_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et d'après la question 1, φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'où $Im(\varphi) = Vect(\varphi(K_1), \varphi(K_2), \varphi(K_3), \varphi(K_4))$.

Or, $\varphi(K_4) = K_2 - K_3$.
et $\varphi(K_1) = K_3 - K_2$.
D'où $\varphi(K_1) = -\varphi(K_4)$.
Et de même, on a $\varphi(K_2) = -\varphi(K_3)$

D'où $Im(\varphi) = Vect(-\varphi(K_4), -\varphi(K_3), \varphi(K_3), \varphi(K_4))$
$= Vect(\varphi(K_3), \varphi(K_4))$
$= Vect(K_1 - K_4, K_2 - K_3)$
$= Vect(X_1, X_2)$, avec $X_1 = K_1 - K_4$
$X_2 = K_2 - K_3$.

(X_1, X_2) est libre car les vecteurs sont non colinéaires. $\boxed{\text{Donc c'est une base de } Im(\varphi) \text{ et } \dim(Im(\varphi)) = 2}$.

B) D'après le théorème du rang, avec $\varphi \in L(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ finie :

$\dim(Ker(\varphi)) + \dim(Im(\varphi)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
$\iff \dim(Ker(\varphi)) + 2 = 4$
$\iff \boxed{\dim(Ker(\varphi)) = 2}$.

Montrons que (I, J) est une base de $Ker(\varphi)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Montrons que (I, J) est génératrice de $\ker(f)$.

$$f(I) = JI - IJ$$
$$= J - J$$
$$= 0$$

$$f(J) = J^2 - J^2$$
$$= 0.$$

Donc (I, J) est bien génératrice de $\ker(f)$.

Montrons que (I, J) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 I + \lambda_2 J = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc (I, J) est libre.

$\boxed{\text{Donc } (I, J) \text{ est une base de } \ker(f) \text{ et } \dim(\ker(f)) = 2.}$

4.a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

On a $A^3 = A^2 A$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4A.$$

Donc $\boxed{A^3 - 4A = 4A - 4A = 0}$

8) $A^3 - 4A = 0$. Un polynome annulateur de A est donc le polynome $P(X) = X^3 - 4X$.

$P(X) = 0 \iff X^3 - 4X = 0$

$\iff X(X^2 - 4) = 0$

$\iff X = 0$ ou $X^2 - 4 = 0$

$\iff X = 0$ ou $X^2 = 4$

$\iff X = 0$ ou $X = -2$ ou $X = 2$.

D'où $\boxed{Sp(f) \subset \{-2; 0; 2\}}$ car A est la matrice de f.

5) Scilab montre que $rg(A - 2I) = rg(A + 2I) = 3$.

Comme $A - 2I$ et $A + 2I$ sont deux matrices carrées de taille 4, on conjecture que $A - 2I$ et $A + 2I$ ne sont pas inversibles donc -2 et 2 sont valeurs propres de A et donc de f.

6.a) $AX = 2X$

$$\iff \begin{cases} -y + z = 2x \\ -x + t = 2y \\ x - t = 2z \\ y - z = 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3 \iff \begin{cases} x - t = 2x \\ y - z = 2y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x - t = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$ (la question 3 a, avec l'échelonnage de A, nous permet "d'aller plus vite")

$\iff \begin{cases} t = -x \\ z = -y \end{cases}$

D'où $\boxed{AX = 2X \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{pmatrix}}$

De même on a $AX = -2X$

$\iff \begin{cases} x - t = -2x \\ y - z = -2y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x - t = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = t \\ 3y = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ -2x - y + z = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\sim \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ -y - 3z - 2t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_4$

$$\sim \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \\ -y - 3z - 2t = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\sim \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \\ -4z - 4t = 0 \\ -4z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \\ 4(-z - t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z + z = 0 \\ y - z + 2z = 0 \\ t = -z \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :**	**Session :** 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ t = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ -y = z \\ -t = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ t = -z \end{cases}$$

D'où $\boxed{AX = 2X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \\ -z \end{pmatrix}}$

$AX = -2X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\sim \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ y + z = 0 \\ -2z + 2t = 0 \\ -2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ z = -y \\ 2z = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ z = -y \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ t = z \end{cases}$$

D'où $\boxed{AX = -2X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \\ z \end{pmatrix}}$

B) 0 est valeur propre de φ car $rg(\varphi) = 2 \neq 4$.
Et d'après la question précédente, il y a une unique solution aux équation $AX = 2X$ et $AX = -2X$.
Donc 2 et -2 sont valeurs propres de φ.

10/30

D'où $\boxed{Sp(P) = \{-2 ; 0 ; 2\}}$

D'après ce qui précède, en notant E_{-2}, E_2 et E_0 les sous-espaces propres de P :

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{-2}(P) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ \\ E_2(P) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ \\ \text{et } E_0(P) = \mathrm{Vect}(I, J) \quad (\text{question } 3.b) \end{array}}$$

Exercice 2

1)
```
X = 0
while rand() <= p
    X = X+1
```

2.a) "Au pire", le joueur échoue au niveau 1. Il a donc le niveau 0. X_n prend alors la valeur 0.
"Au mieux", le joueur réussit tous les niveaux : X_n prend la valeur n.
Et toutes les valeurs intermédiaires sont comprises.
$\boxed{\text{Conclusion : } X_n(\Omega) = [\![0 ; n]\!]}$.

b) $X_n = 0$ signifie que le joueur échoue au premier niveau. D'après l'énoncé, cette probabilité vaut $1-p = q$.
$\boxed{\text{Conclusion : } P(X_n = 0) = q}$

c) $(X_n = n)$ signifie que le joueur gagne tous les niveaux.

D'où $\boxed{(X_n = n) = \bigcap_{k=1}^{n} R_k}$

$$P(X_n = n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(R_k) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} p$$

$$= \boxed{p^n}$$

d) Soit $k \in [\![1 ; n-1]\!]$.

$$\boxed{(X_n = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} R_i\right) \cap \overline{R_{k+1}}}$$

$$P(X_n = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} R_i \cap \overline{R_{k+1}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(R_i) \times P(\overline{R_{k+1}}) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= q p^k$$

<u>Conclusion</u> : $\forall k \in [\![0 ; n-1]\!]$, $P(X_n = k) = qp^k$.
L'expression reste valable pour $k = 0$:
$P(X_n = 0) = qp^0 = q$ (question 2. b))

3) $$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} qp^k$$

$$= q\left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right) + P(X_n = n)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$= q \times \left(\frac{1-p^m}{1-p}\right) + p^m$ (somme des termes d'une suite géométrique)

$= q\left(\frac{1-p^m}{q}\right) + p^m$

$= 1 - p^m + p^m$

$= 1$

$\boxed{\text{Conclusion : } \sum_{k=0}^{m} P(X_m = k) = 1}$

4.a) X_m admet une espérance car l'ensemble de ses valeurs est fini.

$E(X_m) = \sum_{k=0}^{m} k P(X_m = k)$

$= \sum_{k=0}^{m-1} k P(X_m = k) + m P(X_m = m)$

$= \boxed{\left(\sum_{k=0}^{m-1} k q p^k\right) + m p^m}$

B) $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} q k p^k$

$= q \sum_{k=0}^{+\infty} k p^k$

$= q \sum_{k=1}^{+\infty} k p^k$ (terme $k=0$ nul)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= qp \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1}$

$= \dfrac{pq}{(1-p)^2}$ (série géométrique convergente (dérivée d'ordre 1) et de raison $p \in]-1;1[$.

et comme $p \in]0;1[$,
on a $np^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

$\boxed{\text{Conclusion : } \lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \dfrac{pq}{(1-p)^2}}$

5. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq k+1$.
$(X_n = k)$ signifie que le joueur possède le niveau k.
et comme $n \geq k+1$, alors $k \leq n-1$.
alors la question 2.d permet d'affirmer, comme $k \leq n-1$, que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k+1, P(X_n = k) = qp^k}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k+1, P(X_n = k) = qp^k$.
Comme l'expression qp^k ne dépend pas de n, alors on a directement : $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} qp^k$.

$\boxed{\text{Donc } (X_n) \text{ converge en loi vers une variable } X \text{ avec } \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = qp^k.}$

c) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$P(~~X~~ Y = k) = P(X+1 = k)$

$= P(X = k-1)$

$= q p^{k-1} \quad (k-1 \in X(\Omega))$

D'où $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)}$

$E(Y) = \frac{1}{q}$.

D'où $E(X+1) = \frac{1}{q}$

$\Leftrightarrow E(X) + 1 = \frac{1}{q}$

$\Leftrightarrow E(X) = \frac{1}{q} - \cancel{q}\ 1 = \frac{1-q}{q}$

$= \boxed{\frac{p}{q}}$.

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{pq}{(1-p)^2} = \frac{pq}{1-2p+p^2}$

$= \frac{pq}{1-2(1-q)+(1-q)^2}$

$= \frac{pq}{1\cancel{2} - 2 + 2q + 1 - 2q + q^2}$

$= \frac{pq}{2-2+2q-2q+q^2}$

$= \frac{pq}{q^2}$

$= \frac{p}{q}$

D'où $\boxed{E(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)}$

Problème

Partie 1

1.a) Tout d'abord, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$x \mapsto x^p (1-x)^q$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, donc sur $[0;1]$ en particulier.

Ensuite, $I(p,q)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé. Il n'y a aucun problème d'impropreté.
D'où $\boxed{I(p,q) \text{ est bien défini}}$

B) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$$

$$= \int_0^1 u'(x) \, v(x) \, dx,$$

avec u et v C^1 sur $[0,1]$ définies par :

$$u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \qquad v(x) = (1-x)^q$$

$$u'(x) = x^p \qquad v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$$

On intègre par parties :

$$I(p,q) = \left[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p+1} \, dx$$

$$= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \; I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)}$$

2.a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} (1-x)^0 \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{p+q} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 \qquad ((p,q) \in \mathbb{N}^2)$$

$$= \boxed{\frac{1}{p+q+1}}$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$$I(p,q) = \frac{p! \, q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{(p+q+1)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

$= \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$

Conclusion : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p,q) = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$

B) Soit $p \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = I(p,p) = \frac{p!\,p!}{(p+p+1)!} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$ (question précédente)

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$

Partie 2

3) * B_n est continue sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ car constante et continue sur $]0;1[$ car polynomiale. Donc B_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

* $\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[,\ B_n(x) = 0 \geq 0$.
 $\forall x \in [0;1],\ (1-x) \in [0;1]$ donc $x^n \geq 0$, $(1-x)^n \geq 0$ et de même $\alpha_n \geq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où $\forall x \in [0;1]$ $b_n(x) \geq 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $b_n(x) \geq 0$.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\,dx = \int_0^1 b_n(x)\,dx$ (car b_n est nulle sur $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$)

$= \alpha_n \int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$

$= \alpha_n\, I(n,n)$

$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

$= 1$.

Conclusion : b_n est une densité.

4) Une densité de X_0 est la fonction

$b_0(x) = \begin{cases} \alpha_0 x^0 (1-x)^0 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D'où la fonction de répartition de X_0 est, $\forall x \in [0;1]$

$F_{X_0}(x) = \int_{-\infty}^{x} b_0(t)\,dt$

$= \int_0^x 1\,dt$

$= [t]_0^x$

$= x$.

Comme X_0 est à valeur dans $[0;1]$,
on a alors $F_{X_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

D'où X_0 suit la loi uniforme sur $[0;1]$

5.a) X_n admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$ converge.

Or, f_n est nulle sur $]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx = \int_0^1 x f_n(x)\,dx$

$$= \alpha_n \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\,dx$$

qui est une intégrale bien définie d'après la 1.a.

D'où X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \alpha_n \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\,dx$$

$$= \alpha_n I(n+1, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!\,n!}{(n+1+n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(2n+1)!}{n!\,(2n+2)!}$$

$$= \frac{n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Pour les mêmes raisons que pour l'espérance d'après la 1.a, X_n admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(X_n^2) = \alpha_n I(n+2, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{n!\,(n+2)!}{(n+2+n+1)!}$$

$$= \frac{(n+2)!\,(2n+1)!}{n!\,(2n+3)!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(2n+3)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

et d'après Koënig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$
$$= \frac{n+2}{2(n+3)} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{2(n+2) - n - 3}{4(n+3)}$$
$$= \frac{2n+4-n-3}{4(n+3)}$$
$$= \boxed{\frac{n+1}{4(n+3)}}$$

c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, comme $P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ est une probabilité, on a :

$$0 \leq P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|X_n - E(X_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

donc $0 \leq P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n+1}{4(n+3)\varepsilon^2}$

~~Or $n^2 \geq n$~~
~~donc $n^2+3 \geq n+3$~~
~~donc $4($~~

Par encadrement, $P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

~~(Aucun fait possible sur la vraigne car je ne trouve pas~~

car $n+1 < 4(n+3)\varepsilon^2$ donc $\frac{n+1}{4(n+3)\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 3

6) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_0(x) = d_0 \int_0^x t^0 (1-t)^0 \, dt$$

$$= \int_0^x 1 \, dt$$

$$= [\,t\,]_0^x$$

$$= x$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = x}$

7.a) $f_n(1) = d_n \int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt$

$$= \int_0^1 B_n(t) \, dt$$

$$= \boxed{1}$$ (question 3 : B_n est une densité et nulle en dehors de $[0;1]$)

8) Soit $x \in \mathbb{R}$, on fait le changement de variables de classe C^1 $u = 1-t$ dans $f_n(x)$.

$u = 1-t$ donc $t = 1-u$ et $dt = -du$

$t = 0 \Rightarrow u = 1$

$t = x \Rightarrow u = 1-x$

D'où $f_n(x) + f_n(1-x) = d_n \int_1^{1-x} (1-u)^n u^n \, du$

$$+\alpha_n \int_0^{1-x} t^n (1-t)^n \, dt$$

$$= \alpha_n \int_{1-x}^{1} u^n (1-u)^n \, du + \alpha_n \int_{0}^{1-x} t^n (1-t)^n \, dt$$

$$= \alpha_n \left(\int_0^{1-x} t^n (1-t)^n \, dt + \int_{1-x}^{1} u^n (1-u)^n \, du \right)$$

$$= \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt \quad \text{(relation de Chasles)}$$

$$= f_n(1)$$

$$= 1 \quad \text{(question précédente)}.$$

$$\boxed{\underline{\text{Conclusion :}} \ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1}$$

c) $f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$ (question précédente)

$$\iff f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\iff 2 f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\iff \boxed{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

8.a) $t \mapsto t^n(1-t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale donc sur $[0; x]$ (ou $[x; 0]$) aussi.

Donc $t \mapsto t^n(1-t)^n$ admet une primitive G sur $[0; x]$ ou $[x; 0]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, dt$

$$= \alpha_n \left[G(t) \right]_0^x$$

$= \lambda_n (G(x) - G(0)))$

$= \lambda_n G_n(x) - \lambda_n G(0)$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables (primitive et constante)

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f_n'(x) = \lambda_n G_n'(x) - 0$

$= \lambda_n x^n (1-x)^n$.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \lambda_n x^n (1-x)^n}$

B) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \lambda_n x^n (1-x)^n$

$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n$.

On sait que $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} > 0$.

Donc $f_n'(x) \geq 0 \iff x^n (1-x)^n \geq 0$

$\iff x^n (1-x)^n \geq 0$ ou $x^n (1-x)^n \leq 0$

Si n est pair, on a, dans tous les cas,

$x^n (1-x)^n \geq 0$.

Si n est impair :

alors $x^n (1-x)^n \geq 0 \iff x \geq 0$ et $1-x \geq 0$

$\iff x \geq 0$ et $x \leq 1$.

$\iff x \in [0;1]$.

et $x^n (1-x)^n \leq 0 \iff x^n$ ~~≤ 0~~ ou $(1-x)^n \leq 0$

$\iff x \leq 0$ ou $1-x \leq 0$

$\iff x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

<u>On conclut</u> :

- Si n est pair : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) \geq 0$.
- si n est impair : $\forall x \in [0;1]$, $f_n'(x) \geq 0$

$\forall x \notin [0;1]$, $f_n'(x) \leq 0$.

9.a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f_n(x) = \lambda_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, dt$

$= \lambda_n \int_0^x (t(1-t))^n \, dt$.

On sait que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

~~Donc en posant~~ $\cancel{a = x}$ ~~et~~ $\cancel{b = 1-x}$

$$\cancel{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

~~donc~~

$$(t(1-t))^n = (t-t^2)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (-t^2)^{n-k}$$

D'où $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^k (-t^2)^{n-k} \, dt$

Non abouti.

10.a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \lambda_n x^n (1-x)^n = \lambda_n (x(1-x))^n$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = \lambda_n \times n (1-2x) (x(1-x))^{n-1} \\ &\qquad\qquad = n \lambda_n (1-2x)(x(1-x))^{n-1}. \end{aligned}}$$

b) Si ~~est~~ n est impair :

$\cancel{\text{alors } \forall x \in \mathbb{R} \ (x(1-x))^{n-1} \geq 0.}$

$\cancel{\text{et } 1-2x \geq 0 \iff}$

$f_n''(x) \geq 0 \iff (1-2x)(x(1-x))^{n-1} \geq 0$

$\iff (1-2x) \geq 0$ et $(x(1-x))^{n-1} \geq 0$ car n impair

$\iff x \leq 1/2$ et $x(1-x) \geq 0$ ou $x(1-x) \leq 0$

$\iff x \leq 1/2$ et $x \geq 0$ et $x \leq 1$ ou

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :**	**Session :** 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Exercice 3

1) f_m est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient bien défini de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.

$\forall x \in [0;1]$, $f_m'(x) = \dfrac{x+m-x}{(x+m)^2}$

$= \dfrac{m}{(x+m)^2}$

Or, $(x+m) > 0$ et $m > 0$.

D'où $\forall x \in$ ~~R~~ $[0;1]$, $f_m'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de f_m :

x	0		1
$f_m'(x)$			
$f_m(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{m+1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0;1]$

$0 \leq x \leq 1$

$n \leq x+n \leq n+1$

donc $n^2 \leq n(x+n) \leq n(n+1)$

donc $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n^2}$ (décroissance de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $\frac{x}{n(n+1)} \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{x}{n^2}$ $(x > 0)$

Par croissance de l'intégrale (Bornes dans l'ordre croissant et fonctions en jeu continues)

$$u_n \leq \frac{1}{n^2} \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{x^2}{2n^2}$$

3

3) $\sum \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

(série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc par encadrement (question 2),

$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge}}$.

4.a) D'après la question précédente, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$ est finie.

Donc S_n admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion : (S_n) est convergente.

b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

En sommant les inégalités de $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$:

$0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$ (glissement d'indice)

$= 1 - \frac{1}{n+1}$ (télescopage)

Or, Donc $0 \leqslant S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n+1}$

Par passage à la limite, on a bien :

$\boxed{0 \leqslant \ell \leqslant 1}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k$

$= u_{n+1} \geqslant 0$ (question 2).

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} \geqslant S_n$

$\boxed{\text{D'où } (S_n) \text{ est croissante}}$

5.a) Soit $x \in [0;1]$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{ax+ak-bk}{k(x+k)}$

$= \frac{(a-b)k+ax}{k(x+k)}$

b) Par identification, on a $\begin{cases} a = 1 \\ a-b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

D'où $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{k}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k}\,dx$ (convergence)

$= \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1$

$= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j)$ (~~téléscopage~~ glissement d'indice)

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)}$$

6.a) On a $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma$ et comme $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = \lim_{n \to +\infty} \ln(n+1)$

alors on a $\boxed{T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma}$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in [\![n ; n+1]\!]$.

$n \leqslant k \leqslant n+1$

Donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n}$ (fonction inverse)

donc par croissance de l'intégrale (fonctions continues et $n < n+1$)

$$\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} dk \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{k}\, dk \leqslant \frac{1}{n}\int_n^{n+1} 1\, dk$$

donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}}$

$$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1).$$

Or, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$.

donc $\frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leqslant 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leq I_n$.

D'où $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$

c)