Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 28	**Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques S emlyon BS

V8-0002E
344992
Maths S

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1

Partie A

1) a) soit $t \in]0;+\infty[$, soit $x \in [t, t+1]$.

$$t \leq x \leq t+1$$

car $t \neq 0$.

alors $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t}$

car $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{t}$, $x \mapsto \frac{1}{t+1}$ sont continues sur $[t;t+1]$ et les bornes de l'intégrale sont bien rangés.

$$\int_t^{t+1} \frac{1}{t+1}\,dx \leq \int_t^{t+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_t^{t+1} \frac{1}{t}\,dx$$

$$\frac{1}{t+1} \leq [\ln(x)]_t^{t+1} \leq \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ $\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1)$$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(2+n) + \ln(n+1)$

$= \frac{1}{n+1} - \left(\ln\left((n+1)+1\right) - \ln(n+1)\right) \geq 0$ d'après 1 partie 1

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \sum_{K=1}^{n+1} \frac{1}{K} - \ln(n+1) - \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} + \ln(n)$.

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$ d'après 1 partie 1

donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones.

d'après 1) partie 1

$\forall K \in \mathbb{N}^*$

$0 \leq \frac{1}{K+1} \leq \ln(K+1) - \ln(K) \leq \frac{1}{K}$.

donc $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K+1} \leq \sum_{K=1}^{n} \ln(K+1) - \ln(K) \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K}$.

donc $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K}$.

or $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K+1} \leq \ln(n+1)$

donc $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K+1} - \ln(n+1) \leq 0$.

donc $\sum_{K=2}^{n} \frac{1}{K} - \ln(n+1) \leq 0$.

donc $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - \ln(n+1) \leq 1$.

donc $u_n \leq 1$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

or $\ln(n+1) \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K}$

car $n \mapsto \ln(n)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+}_{*}$

donc $\ln(n) \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K}$

donc $0 \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - \ln(n)$

donc $0 \leq v_n$

or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers γ'

~~2) soit $n\in\mathbb{N}^+$, $K \in [\![1,n]\!]$~~

~~d'après 1) b) partie 1 : $\forall n\in\mathbb{N}^+$ $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K}$.~~

3) soit $n \in \mathbb{N}^*$ d'après 1) b) partie A

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante convergente de limite γ.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée par sa limite γ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

donc $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n \leq \gamma$.

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante convergente de limite γ.

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc minorée par sa limite γ (car $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

donc $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad V_n \geq \gamma$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n \leq \gamma \leq V_n$

donc $u_n + V_n \leq \gamma + V_n$

$$\frac{u_n+V_n}{2} \leq \frac{\gamma+V_n}{2}$$

$$\left|\frac{u_n+V_n}{2} - \gamma\right| \leq \frac{\gamma+V_n}{2} - \gamma$$

$$\left|\frac{u_n+V_n}{2} - \gamma\right| \leq \frac{V_n-\gamma}{2}.$$

or $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n \leq \gamma \leq V_n$

donc $-V_n \leq -\gamma \leq -u_n$.

de plus $V_n - u_n \geq 0$.

$$\left|\frac{u_n+V_n}{2} - \gamma\right| \leq \frac{V_n-u_n}{2}.$$

donc $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \left|\frac{u_n+V_n}{2} - \gamma\right| \leq \frac{1}{2}(V_n - u_n)$.

Partie B :

4) soit $x \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geqslant 0$ car $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$.

donc $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{k+x-k}{k(k+x)} = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$.

on a alors $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ le terme général d'une serie à terme positif qui est équivalent en $+\infty$ à le terme général d'une serie de Riemann convergente ($\alpha > 1$)

donc par critère d'équivalence des series à termes positives $\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ converge.

donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$ la serie $\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ converge

5) a) soit $x = 0$

$S(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$ $S(0) = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

soit $n = 1$ soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{K=1}^{N} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

or $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$.

donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{K=1}^{N} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right) = 1$.

donc $S(1) = 1$.

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{K=1}^{n} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{1}{K} - \frac{2}{2K+1} \right)$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - 2 \left(\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{2K+1} \right)$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - 2 \left(\sum_{K=1}^{2n+1} \frac{1}{K} - \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{2K} - 1 \right)$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - 2 \sum_{K=1}^{2n+1} \frac{1}{K} + \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} + 2$$

$$= 2 \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - 2 \sum_{K=1}^{2n+1} \frac{1}{K} + 2$$

$$= 2 \left(\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - \sum_{K=1}^{2n+1} \frac{1}{K} \right) + 2$$

$$= 2 - 2 \sum_{K=n+1}^{2n+1} \frac{1}{K}.$$

Ainsi $\quad 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{K}{n}}$

$$= 2 - \frac{2}{2n+1} - 2\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{n+K}.$$

$$= 2 - 2\left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{K=n+1}^{2n} \frac{1}{K}\right).$$

$$= 2 - 2\left(\sum_{K=n+1}^{2n+1} \frac{1}{K}\right).$$

$$= \sum_{K=1}^{n}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+\frac{1}{2}}\right)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^+.$

$$\sum_{K=1}^{n}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{K=n+1}^{2n+1} \frac{1}{K} = 2 - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{K}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n+1} = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{K}{n}} = 0.$$

donc $S\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$

6) soit $N \in \mathbb{N}^+$, $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

$$\sum_{K=1}^{N}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+y}\right) - \sum_{K=1}^{N}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+x}\right) = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K+x} - \frac{1}{K+y}$$

$$= \sum_{K=1}^{N} \frac{(K+y)-(K+x)}{(K+x)(K+y)}.$$

$$= \sum_{K=1}^{N} \frac{y-x}{(K+x)(K+y)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$

or $\sum_{K\geq 1}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+x}\right)$ converge d'après partie B) 4).

donc $\sum_{K\geq 1}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+x}\right)$ et $\sum_{K\geq 1}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+y}\right)$ converge

donc leur difference converge et vaut $\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{(y-x)}{(K+x)(K+y)}$.

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2}$ $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(K+x)(K+y)}$

b) soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $x < y$.

d'après 6) a) partie B

$\forall x,y \in (\mathbb{R}^+)^2$ $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(K+x)(K+y)}$.

or $y - x > 0$ et $\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(K+x)(K+y)} \geq 0$ car la serie es ~~ta~~ terme positive

donc $S(y) - S(x) \geq 0$.

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $x < y$

donc $S(x) \leq S(y)$

donc S est une fonction croissante

c) soit $x \in \mathbb{R}^+$, $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in \mathbb{R}^+$

d'après 6a) partie B, on pose $y = x+h$.

$S(x+h) - S(x) = h \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(K+x)(K+x+h)}$.

S est derivable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim_{h\to 0} |h| \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K^3} = 0$.

donc $\lim_{h \to 0} \left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = 0$.

donc par le théorème d'encadrement

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

donc S est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

7) a) soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)}.$$ d'après 6) a) partie B).

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}$$

soit $N \in \mathbb{N}^*$ $\quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+x+1}$

or $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+x+1} = 0$

donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{x+1}.$

donc $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}$.

b) soit $n \in \mathbb{N}^+$.

montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; P(n) :$ « $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ».

Initialisation

soit $n = 1$.

$S(1) = 1$ d'après 5)a).

$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \qquad 1 = 1$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}^+$

$S(n+1) = S(n) + \frac{1}{n+1}$ d'après 7) a)

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$ Hypothèse de Récurrence.

$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

donc $P(n+1)$ est vraie

conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

8) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad x \mapsto \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ est continue sur $[0,1]$
la fonction admet donc une primitive.

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - [\ln(k+x)]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1)$$ par télescopique

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

$$= u_n$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx$

b) soit $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad S$ est une fonction positive et continue sur $[0,1]$.

$$S(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geqslant 0$$

donc par positivité de l'intégrale, les bornes rangés dans l'ordre croissante $\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\, dx \geqslant 0$.

donc $\int_0^1 s(x)\,dx - u_n \geq 0$

c) d'après 8b) partie B

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \int_0^1 s(x)\,dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

on a alors

$$u_n \leq \int_0^1 s(x)\,dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + u_n.$$

or $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ d'après 1)b) partie A

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0$ car c'est le reste d'une serie convergente.

donc par le theoreme d'encadrement

$$\int_0^1 s(x)\,dx = \gamma.$$

Partie C

a) soit $x \in \mathbb{R}$.

soit $x \geq 1$ $\frac{1}{x^2} \geq 0$.

soit $x < 1$ $0 = 0$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0$.

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ comme la fonction inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas

$x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;1[$ car la fonction est constante.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ f est continue sauf eventuellement en 1.

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 28	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S emlyon BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

soit $A \in [1 ; +\infty[$

$\int_{-\infty}^{1} 0 \, dx = 0$

$\int_{1}^{A} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{1}{-x} \right]_1^A$

$= \frac{1}{-A} + 1$

or $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{-A} = 0$

donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-\infty}^{1} 0 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

f est une densité de probabilité

10) a) soit $x \in \mathbb{R}$

soit $x \in]-\infty ; 1[$

$F_X(x) = 0$

soit $x \in [1 ; +\infty[$

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2} dt$

$= 1 - \frac{1}{x}$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) soit $x \in \mathbb{R}$.

X admet une esperance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument

* $\int_{-\infty}^{1} 0 \cdot x \, dx = 0$.

* soit $A \in [1 ; +\infty[$.

$$\int_{1}^{A} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{1}^{A}$$
$$= \ln(A)$$

or $\lim_{A \to +\infty} \ln(A) = +\infty$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est divergente

donc X n'admet pas d'esperance.

11) soit $x \in [0, 1[$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad Y(\Omega) = [0, 1[$.

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X - \lfloor X \rfloor \leq x)$$
$$= \mathbb{P}\left(X - \lfloor X \rfloor \leq x \cap \bigcup_{k=1}^{+\infty} \lfloor X \rfloor = k\right).$$

union est disjoint et la serie des probabilités convergent

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X - \lfloor X \rfloor \leq x \cap \lfloor X \rfloor = k\right).$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X - k \leq x \cap k \leq X \leq k+1\right).$$

car $x \in [0, 1]$.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(k \leq X \leq k+x\right).$$

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq k+x)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+x} \frac{1}{t^2} dt$$ car $k \in \mathbb{N}^*$ donc la densité n'est pas nulle.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_k^{k+x}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

$$= S(x)$$

$\mathbb{P}(Y \leq x) = S(x)$

soit $x \in [0,1[$.

b) $\mathbb{P}(Y \leq x) = S(x)$ et $S(1) = 1$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

donc la fonction de répartition $F_Y(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) d'après 6)c) partie B.

S est derivable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0,1[$.

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

ainsi S' est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0,1[$.

donc on pose f_Y une densité de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_Y(x) = \begin{cases} S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

12) Y admet une esperance si et seulement si
$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx$ est absolument convergente.

Regardons sur $[0,1]$, car la densité est nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$.

par intégration par partie : $x \mapsto S(x)$ est continue sur $[0,1]$

$$\int_0^1 S'(x)x\,dx = [S(x)x]_0^1 - \int_0^1 S(x)dx.$$

$x \mapsto x$ est continue sur $[0,1]$

$$= S(1) - S(0) - \underbrace{\int_0^1 S(x)dx}_{= \gamma \text{ d'après 8) c) partie B.}}$$

$$= 1 - 0 - \gamma$$
$$= 1 - \gamma$$

donc $E(Y)$ existe et vaut $\underline{1-\gamma}$

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 28	**Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques Semlyon BS

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 2

Partie A

1) soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_n(1) = X - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)0 + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2 0$$

$$= X$$

soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\varphi_n(X^i) = X^{i+1} - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)(i)X^{i-1} + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(i)(i-1)X^{i-2}$$

$$= X^{i+1} - \frac{i}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X^i - X^{i-1}) + \frac{i(i-1)}{n^2}X^{i-1}(X^2-2X+1)$$

$$= X^{i+1} - \frac{i}{n^2}\big((2n-1)X^{i+1} - (2n-1)X^i + X^i - X^{i-1}\big) + \frac{i(i-1)}{n^2}\big(X^{i+1} - 2X^i + X^{i-1}\big)$$

$$= X^{i+1}\left(\frac{i(2n-1)}{n^2} + 1 + \frac{i(i-1)}{n^2}\right) + X^i\left(\frac{i(2n-1)}{n^2} - \frac{i}{n^2} - \frac{2i(i-1)}{n^2}\right)$$

$$+ X^{i-1}\left(\frac{i}{n^2} + \frac{i(i-1)}{n^2}\right)$$

$$= X^{i+1}\left(\frac{n^2 - 2ni - i + i^2 - i}{n^2}\right) + X^i\left(\frac{2ni - \cancel{i} - \cancel{i} - 2i^2 + \cancel{2i}}{n^2}\right) + X^{i-1}\left(\frac{i^2}{n^2}\right)$$

$$= X^{i+1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^2 + X^i\left(\frac{2(i)(n-i)}{n^2}\right) + X^{i-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) soit $i \in [\![1,n]\!]$, $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi_n(\lambda P+Q) = X(\lambda P+Q) - \frac{1}{n^2}\left((2n-1)X+1\right)(X+1)(\lambda P+Q)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(\lambda P+Q)''$

$= \lambda\left(PX - \frac{1}{n^2}\left((2n-1)X+1\right)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''\right)$

$+ QX - \frac{1}{n^2}\left((2n-1)X+1\right)(X-1)Q' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2Q''$

par linéarité de la dérivée de polynôme

$= \lambda\,\varphi_n(P) + \varphi_n(Q)$

φ_n est linéaire.

soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$\varphi_n(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,\varphi_n(X^i)$.

$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{n-i}{n}\right)^2 X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1} + a_0X$

$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} a_i\left(\frac{n-i}{n}\right)^2 X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}}_{\text{de degré au plus } n} + a_0X + X^{n-1}$

pour $i=n$.

$\deg X^{n-1} = n-1$

donc $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

φ_n est un endomorphisme.

b) $\varphi(1) = X$

$\varphi(X) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{2}{4}X + \frac{1}{4}$

$\varphi(X^2) = 0 + 0 + \frac{1}{4}X \quad = X$

$$A_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

---

b). $rg(A_2) = 2$ car colonne 1 et colonne 3 de la matrice est identique.

donc $\ker A_2 \neq \{0_{M_3(\mathbb{R})}\}$

donc 0 est valeur propre.

soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} -\lambda x + \frac{1}{4}y = 0 \\ x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 \\ \frac{1}{4}y - \lambda z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x = \frac{1}{4}y \\ x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 \\ \frac{1}{4}y = \lambda z \end{cases}$$

si $\lambda = 1$

alors $\begin{cases} x = \frac{1}{4}y \\ x - \frac{1}{2}y + z = 0 \\ \frac{1}{4}y = z \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{1}{4}y = x = z. \\ x - \frac{1}{2}y + z = 0. \end{cases}$

donc 1 est valeur propre et $E_1(A_2) = Vect(1, 4, 1)$.

si $\lambda = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}y \\ x + y + z = 0 \\ -\frac{1}{2}z = \frac{1}{4}y \end{cases} \iff \begin{cases} -x = \frac{1}{2}y \\ x + y + z = 0 \\ -z = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre et $E_{-\frac{1}{2}}(A_2) = Vect(1, -2, 1)$.

si $\lambda = 0$

alors $\begin{cases} \frac{1}{4}y = 0 \cdot x \\ x + \frac{1}{2}y + z = 0 \\ \frac{1}{4}y = 0 \cdot z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$

$E_0(A_2) = \text{Vect}(1, 0, -1)$.

donc $Sp(A_2) = \{\frac{1}{2}, 0, 1\}$.

A_2 est diagonalisable car A_2 est une matrice d'ordre 3 et elle admet 3 valeurs propres distincts.

Les sous espaces propres de A_2 sont

$E_0(A_2) = \text{Vect}(1, 0, -1)$

$E_1(A_2) = \text{Vect}(1, 4, 1)$

$E_{-\frac{1}{2}}(A) = \text{Vect}(1, -2, 1)$.

2)c)

$Sp(\varphi_2) = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$ car A_2 est la matrice φ_2 dans la base canonique $B_2 = (1, X, X^2)$ donc φ_2 et A_2 admettent les mêmes valeurs propres.

une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2 est :

$B_{\varphi_2} = (1 - X^2, 1 + 4X + X^2, 1 - 2X + X^2)$.

3) $\varphi_n((X-1)^n) = X(X-1)^n - \frac{1}{n^2}((2n-1)X + 1)(X-1)\, n\, (X-1)^{n-1}$

$+ \frac{1}{n^2} X(X-1)^2 (n)(n-1)(X-1)^{n-2}$.

$= X(X-1)^n - \frac{1}{n}((2n-1)X + 1)(X-1)^n + \frac{1}{n} X(X-1)^n (n-1)$.

$= (X-1)^n \left(X - \frac{1}{n}(2n-1)X - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(n-1)X \right)$.

$= (X-1)^n \left(X - 2X + \frac{X}{n} - \frac{1}{n} + X - \frac{1}{n}X \right)$.

$= (X-1)^n \left(\frac{-1}{n} \right)$.

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 **Nombre de pages :** 28 **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques S emlyon BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\cancel{= 2\left(-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}\right) + 2.}$$

$$\cancel{= 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}.}$$

donc $\varphi_n((X-1)^n) = (X-1)^n\left(\frac{-1}{n}\right)$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(X-1)^n$ est vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $-\frac{1}{n}$

4) soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) d'après 1) b) partie A. on a

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}$

donc $\varphi_n(X^i)(1) = \dfrac{(n-i)^2 + 2i(n-i) + i^2}{n^2}$

$$= \frac{(n-i)(n-i+2i) + i^2}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - i^2 + i^2}{n^2} = 1$$

donc $\forall i \in [\![0,n]\!]$ $\varphi_n(X^i)(1) = 1$

4) b) soit $i \in [\![0, n]\!]$

$$\begin{array}{c} \\ A_n = \end{array}
\begin{array}{ccccc}
\varphi(X^n) & \varphi(X^{n-1}) & \cdots & \varphi(1) & \\
\left(\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ \frac{2(n-1)}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} \end{matrix} & \cdots & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ X^{n-1} \\ X^n \end{matrix}
\end{array}$$

on remarque on a alors pour la colonne la plus à droite, la somme des coefficients vaut 1

ainsi pour les autres colonnes la somme des coefficient vaut $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\left(\frac{n-i}{n}\right)^2 + \frac{2i(n-i)}{n^2} + \frac{i^2}{n^2}$

$$= \frac{1}{n^2}\left((n-i)^2 + 2i(n-i) + i^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((n-i)(n-i+2i) + i^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2 - i^2 + i^2\right) = 1$$

donc la somme des coefficients sur chaque colonne de A vaut 1

5) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$(n+1)^2 \varphi_{n+1}((x-1)P) =$

$= (n+1)^2 \left(x(x-1)P - \frac{1}{(n+1)^2}((2n-1)x+1)(x-1)((x-1)(x)P)' + \frac{1}{(n+1)^2} x(x-1)^2((x-1)xP)'' \right).$

or $((x-1)xP)' = ((x^2-x)P)'$

$= (2x-1)P + P'(x^2-x)$

$((x-1)xP)'' = P'(2x-1) + 2P + (2x-1)P' + P''(x^2-x).$

$= 2P'(2x-1) + 2P + P''(x^2-x)$

donc $(n+1)^2 \varphi_{n+1}((x-1)P)$

$= \frac{x(x-1)P}{(n+1)^2} - ((2n-1)x+1)(x-1)((2x-1)P + P'(x^2-x)) + x(x-1)^2(2P'(2x-1)+2P+P''(x^2-x))$

$= (x-1)\left(\frac{xP}{(n+1)^2} - ((2n-1)x+1)(x-1)((2x-1)P + P'(x^2-x)) + x(x-1)^2 \right.$

b)

si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ

alors $\varphi_n(P) = \lambda P$.

d'après 5a) Partie 1).

$$\varphi_{n+1}((X-1)P) = \frac{X-1}{(n+1)^2}\left(n^2\lambda P - P\right)$$

$$= \frac{P(X-1)}{(n+1)^2}(n^2\lambda - 1).$$

alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} associé à la valeur propre $\dfrac{n^2\lambda-1}{(n+1)^2}$.

6) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$

montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$P(n) = $ « $Sp(\varphi_n) = \left\{ \dfrac{-n+(j+1)j}{n^2} \ ; \ j \in [\![0,n]\!] \right\}$ ».

soit $n = 1$

$\varphi_1(P) = XP - (X-1)(X+1)P' + X(X-1)^2P''$

$j=0$ on a $\dfrac{-1+(j+1)j}{} = 0$

$j=1$ on a $\dfrac{-1+2}{1} = 1$

donc $Sp(\cancel{\varphi_1}) = \{1\}$.

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$. supposons $P(n)$ vraie, montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie.

d'après 5b) si λ est la valeur propre de φ_n associé au vecteur propre P alors $\dfrac{n^2\lambda-1}{(n+1)^2}$ est la valeur propre associé au vecteur $P(X-1)$

alors $\underbrace{\text{soit}}_{\forall j \in [\![0,n]\!]}$ $\lambda = \dfrac{-n+(j)(j+1)}{n^2}$.

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 28	Session : 2021

Épreuve de : Mathématique S emlyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

on a alors $\frac{n^2\lambda-1}{(n+1)^2} = \frac{-n+j(j+1)-1}{(n+1)^2}$.

$= \frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2}$.

donc on a $P(n+1)$ est vraie.

conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad sp(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} ; j \in [\![0,n]\!] \right\}$.

b) φ_n est diagonalisable car les valeurs propres sont toutes distincts et φ_n admet $n+1$ valeur propres (qui est égale à $\dim \mathbb{R}_n[X]$).

les dimension de chachun des sous-espaces propres sont 1

7) a) soit $n \in \mathbb{N}$,

$\varphi_n(\Pi_n) = \varphi_n\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 x^i\right)$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n(x^i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \left(\frac{(n-i)^2}{n^2} x^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} x^i + \left(\frac{i}{n}\right)^2 x^{i-1}\right)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) b)

le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est le vecteur $\Pi_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 x^i$

Partie B.

9) $Z_1(\Omega) = \{n-1\}$

$\mathbb{P}(Z_1 = n-1) = 1$

Z_1 suit une loi certaine de paramètre 1

10) Soit $k \in \mathbb{N}$, $i \in [\![0, n]\!]$.

on pose un systemè complète d'evenement

$([Z_k = i-1]; [Z_k = i]; [Z_k = i+1])$.

Par la formule de probabilité totale

$\mathbb{P}(Z_{k+1} = i) = \mathbb{P}_{[Z_k=i-1]}(Z_{k+1}=i)\mathbb{P}(Z_k = i-1) + \mathbb{P}_{[Z_k=i+1]}(Z_{k+1}=i)\mathbb{P}(Z_k=i+1)$

$+ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1}=i)\mathbb{P}(Z_k = i)$.

$= \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\mathbb{P}(Z_k=i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i+1)$.

12) a) soit $k \in \mathbb{N}$

$(Z_{k+1} - Z_k)(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$

$\mathbb{P}(\Delta_k = -1) = \mathbb{P}(Z_{k+1} - Z_k = -1)$

$= \mathbb{P}(Z_{k+1} - Z_k = -1 \cap \bigcup_{i=1}^{n} Z_k = i)$ union disjoint

$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_{k+1} - Z_k = -1 \cap Z_k = i)$

$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_{k+1} = i-1 \cap Z_k = i)$

$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i)\mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = i-1)$.

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_K = i)\left(\frac{i}{n}\right)^2 \quad \text{d'après 10} .$$

$$\mathbb{P}(Z_{K+1} - Z_K = 1) = \mathbb{P}\left(Z_{K+1} - Z_K = 1 \cap \bigcup_{i=1}^{n} Z_K = i\right)$$

union disjoint

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_{K+1} = 1 - i \cap Z_K = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_K = i)\, \mathbb{P}_{(Z_K = i)}(Z_{K+1} = 1 - i) .$$

d'après 10

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_K = i)\left(1 - \frac{i}{n}\right)^2$$