D8-00106
055935
Maths 2S

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2020

Épreuve de : MATHS 2 "S" ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1) a)

$\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{x^k}{k} \leqslant x^k$

or la série $\sum_{k\geqslant 1} x^k$ converge car $|x| < 1$ (série géométrique)

par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{x^k}{k}$ converge

ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1} \dfrac{x^k}{k} \text{ converge}}$

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \,]0,1[$

$$\sum_{k=0}^{m-1} t^k = t^0 \times \frac{1-t^m}{1-t} \quad \text{car } t \neq 1$$

$$= \frac{1}{1-t} - \frac{t^m}{1-t}$$

ainsi, $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \,]0,1[,\ \dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t^m}{1-t} + \sum_{k=0}^{m-1} t^k}$

c)

~~$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \,]0,1[, \dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t^m}{1-t} + \sum_{k=0}^{m-1} t^k$ d'après 1)b)~~

~~donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \,]0,1[, \dfrac{t^m}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{m-1} t^k$~~

~~or $\frac{1}{1-0} = 1 = \frac{0^n}{1-0} + \sum_{k=0}^{n-1} 0^k$~~

~~donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \frac{t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k$~~

~~intégrons entre 0 et x (licite car $x \in]0,1[$),~~

~~$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^x \frac{t^n}{1-t} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k\,dt$ par linéarité~~

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall t \in [0, x]$, $0 < 1-x \leq 1-t \leq 1$

donc $\forall t \in [0, x]$, $0 < \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$ car $t^n \geq 0$

par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens),

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt$$

or $\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\,dt$

$$= \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1} \times x^{n+1}$$

comme $0 < x < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$

de plus, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1} \times x^{n+1}\right) = 0$ par produit donc $\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt\right]=0$

donc $\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right]=0$ par encadrement

ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right]=0}$

d)

d'après 1)b), $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in]0,1[$, $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t}-\frac{t^n}{1-t}$

comme $\sum_{k=0}^{n-1} 0^k = 1 = \frac{1}{1-0}-\frac{0^n}{1-0}$

alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[0,1[$, $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t}-\frac{t^n}{1-t}$

intégrons entre 0 et x (licite car $x\in]0,1[$)

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x t^k\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ par linéarité

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\times x^{k+1} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt$

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt$

en passant à la limite $(n\to+\infty)$ ce qui est licite car convergence (1)a)),

$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ d'après 1)c)

ainsi, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

2) a) f est bien définie ssi $\forall x\in[-c,+c]$, la série $\sum_{k\geq1} a_k x^k$ converge

Soit $x\in[-c,+c]$

$\forall k\geq1$, $0\leq|a_k x^k| = |a_k||x|^k \leq |a_k|c^k = |a_k c^k|$

or la série $\sum_{k\geq1}|a_k c^k|$ est absolument convergente d'après l'énoncé par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} |a_n x^n|$ converge

donc la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ converge absolument donc converge

donc $\forall x \in [-c,+c]$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ converge

ainsi, f est bien définie sur le segment $[-c,+c]$

b) Soit $x \in [-c,+c]$ et $N \geq m+1$

$|\sum_{n=m+1}^{N} a_n x^n| \leq \sum_{n=m+1}^{N} |a_n||x|^n$ par inégalité triangulaire

$\leq \sum_{n=m+1}^{N} |a_n||x|^{n-m-1} |x|^{m+1}$

$\leq |x|^{m+1} \sum_{n=m+1}^{N} |a_n||x|^{n-m-1}$

$\leq |x|^{m+1} \sum_{n=m+1}^{N} |a_n| c^{n-m-1}$ car $x \in [-c,+c]$

en passant à la limite $(N \to +\infty)$ ce qui est licite car les séries convergent d'après l'énoncé, on a :

$|\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n x^n| \leq |x|^{m+1} \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| c^{n-m-1} = M_m |x|^{m+1}$

ainsi, $\forall x \in [-c,+c]$, $|\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n x^n| \leq M_m |x|^{m+1}$

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$|f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{m} a_n x^n| = |a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - a_0 - \sum_{n=1}^{m} a_n x^n|$

$= |\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n x^n|$

$\leq M_m |x|^{m+1}$ d'après 2)b)

donc $|(f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{m} a_n x^n) \times \frac{1}{x^m}| \leq M_m |x|$ car $\frac{1}{|x|^m} > 0$

or $\forall k \geq m+1$, $|a_k| c^{k-m-1} = \frac{1}{c^{m+1}} \times |a_k| c^k$

comme la série $\sum_{k \geq 1} |a_k| c^k$ converge d'après l'énoncé

alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{c^{m+1}} |a_k| c^k$ converge par propriété

donc la série $\sum_{k \geq m+1} |a_k| c^{k-m-1}$ converge

donc $M_m \in \mathbb{R}$

or $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

donc $\lim_{x \to 0} (M_m |x|) = 0$

donc $\lim_{x \to 0} \left[\left(f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{m} a_k x^k \right) \times \frac{1}{x^m} \right] = 0$ par encadrement

donc $f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{m} a_k x^k = \underset{x \to 0}{o}\left(\frac{1}{x^m}\right)$

ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^m)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) Supposons que f est nulle sur $]0,+c]$

alors $\forall x \in]0,+c]$, $|f(x)| = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n)| = 0$

Partie II

3) a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{N}^*,\ P^\theta(X=x) = (1-\theta)^{x-1}\theta$

ainsi, $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)}$

b)

. $E^\theta(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E^\theta(X_i)$ par linéarité

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}$ car $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)$ d'après 3) a)
donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)$

$= \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{\theta}$

$= \frac{1}{\theta}$

. $\bar{X} = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

donc $\bar{X}$ est bien un estimateur du paramètre $\frac{1}{\theta}$

ainsi, $\boxed{\bar{X} \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } \frac{1}{\theta}}$

c)

$r^\theta(\bar{X}) = V^\theta(\bar{X})$ car $\bar{X}$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\theta}$

$= V^\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2} V^\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V^\theta(X_i)$ car les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\theta}{\theta^2}$ car $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)$

$= \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1-\theta}{\theta^2}$

ainsi, $\boxed{V^\theta(\bar{X}) = \frac{1}{n} \times \frac{1-\theta}{\theta^2}}$

4) a) Soit $\theta \in \Theta$

$E^\theta(T) = E^\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E^\theta\left(\frac{1}{X_i}\right)$ par linéarité

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} P^\theta(X_i = k)$ d'après le théorème de transfert

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-\theta)^{k-1}\theta}{k}$

$= \frac{\theta}{1-\theta} \times \frac{1}{n} \times n \times \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-\theta)^k}{k}$

$= \frac{\theta}{1-\theta} \times \ln\left(\frac{1}{\theta}\right)$ d'après 1) d) car $\theta \in]0,1[$

$= \frac{\theta \ln(\theta)}{\theta - 1}$

ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta, \quad E^\theta(T) = \frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1}}$

b)

. $T = h(X_1, \dots, X_n)$ où $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$

donc T est un estimateur de θ

. $b_\theta(T) = E^\theta(T) - \theta$

$= \frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1} - \theta$

$= \frac{\theta(\ln(\theta) - (\theta-1))}{\theta-1}$

or $\frac{\theta}{\theta-1} < 0$ car $\theta \in]0,1[$

et $\ln(\theta) \leqslant \theta - 1$ d'après l'inégalité de concavité de ln

Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2020

Épreuve de : MATHS 2 "S" ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

($\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$)

donc $\dfrac{\theta(\ln(\theta)-(\theta-1))}{\theta-1} \geq 0$

or $\ln(\theta) = \theta - 1$ ssi $\theta = 1$ d'après le cours

donc $\ln(\theta) - (\theta-1) < 0$ et $b_\theta(T) > 0$

ainsi, T est un estimateur de θ dont le biais est strictement positif

5) a) Soit $\theta \in \Theta$

$$\ln(L(x_1,\dots,x_n,\theta)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} P^\theta(X_i = x_i)\right)$$

$$= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} P^\theta(X = x_i)\right) \text{ d'après l'énoncé}$$

$$= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} ((1-\theta)^{x_i-1}\theta)\right) \text{ d'après l'énoncé}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln((1-\theta)^{x_i-1}) + \ln(\theta^n)$$

$$= n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} (x_i-1)\ln(1-\theta)$$

$$= n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1-\theta) - n\ln(1-\theta)$$

$= n\ln(\theta) - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-\theta)$

ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta,\ \ln(L(x_1,\dots,x_n,\theta)) = n\ln(\theta) - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-\theta)}$

b)

~~Posons f :~~ $\cancel{\Theta^n \setminus \{(1,\dots,1)\} \times \Theta \to \mathbb{R}}$

$\cancel{(x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto n\ln(x_{n+1}) - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-x_{n+1})}$

~~f est de classe~~ $\cancel{C^1}$ ~~sur~~ $\cancel{\Theta^n \setminus \{(1,\dots,1)\} \times \Theta}$

$\cancel{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i(f)(x_1,\dots,x_{n+1}) = \ln(1-x_{n+1})}$

~~et~~ $\cancel{\partial_{n+1}(f)(x_1,\dots,x_{n+1}) = n\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{1-x_{n+1}}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}$

~~$(x_1,\dots,x_{n+1})$ est un point critique de f $\Leftrightarrow$~~

Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \Theta^n \setminus \{(1,\dots,1)\}$

Posons $f : \Theta \to \mathbb{R}$

$\theta \mapsto n\ln(\theta) - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-\theta)$

f est dérivable sur Θ et $\forall \theta \in \Theta$, $f'(\theta) = \frac{n}{\theta} + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{1}{1-\theta}$

$f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{1}{1-\theta} \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

θ	0		$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$		1
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ est l'unique valeur de θ qui maximise f ($f(\theta) = \ln(L(x_1,\dots,x_n,\theta))$)

ainsi, $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ est l'unique valeur de θ qui maximise la vraissemblance (par stricte croissance de l'exponentielle)

6)a) Soit $\theta \in \Theta$ et $k \geq n$

$$\int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n}-t\right)\left(\frac{2}{t^3}\right) dt = \int_{1/\theta}^{k/n} \frac{k}{n} \times 2 \times \frac{1}{t^3}\, dt - \int_{1/\theta}^{k/n} 2 \times \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \frac{k}{n}\left[-\frac{1}{t^2}\right]_{1/\theta}^{k/n} - 2\left[-\frac{1}{t}\right]_{1/\theta}^{k/n}$$

$$= \frac{k}{n}\left[-\frac{1}{(k/n)^2} + \frac{1}{(1/\theta)^2}\right] - 2\left[-\frac{1}{(k/n)} + \frac{1}{1/\theta}\right]$$

$$= -\frac{n}{k} + \frac{k}{n} \times \theta^2 + 2 \times \frac{n}{k} - 2 \times \theta$$

$$= \frac{n}{k} + \theta^2 \times \frac{k}{n} - 2 \times \theta$$

donc $\frac{n}{k} = 2\theta - \theta^2 \times \frac{k}{n} + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n}-t\right)\left(\frac{2}{t^3}\right) dt$

$$= \theta - \theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n}-t\right)\left(\frac{2}{t^3}\right) dt$$

ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta, \forall k \geq n, \ \frac{n}{k} = \theta - \theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n}-t\right)\left(\frac{2}{t^3}\right) dt}$

b)

. $U = f(X_1, \dots, X_n)$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

donc U est un estimateur de θ

. $\forall \theta \in \Theta$, $b_\theta(U) = E^\theta(U) - \theta$

$$= E^\theta\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) - \theta$$

$$= n\, E^\theta\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) - \theta$$

$$= n \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \times \frac{1}{k} - \theta$$ d'après le théorème de transfert

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \frac{n}{k} - \theta$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\left(\theta - \theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n}-t\right)\frac{2}{t^3}\, dt\right) - \theta$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\left(\theta - \theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right)\right) + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3}\, dt - \theta$$

par linéarité (licite car convergence)

$$= \theta \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) - \theta^2 \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\frac{k}{n} + \theta \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt - \theta$$

$$= \theta \times 1 - \frac{\theta^2}{n} E^{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \theta \times 1 + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt - \theta$$

d'après le théorème de transfert et la formule des probabilités totales

$$= \theta - \frac{\theta^2}{n} \sum_{i=1}^{n} E^{\theta}(X_i) + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt$$

$$= \theta - \frac{\theta^2}{n} \times n \times \frac{1}{\theta} + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt$$

ainsi, U est un estimateur de θ dont le biais $b_\theta(U)$ est donné par :
$$\forall \theta \in \Theta,\ b_\theta(U) = \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt$$

c) Soit $\theta \in \Theta$

d'après l'énoncé, $\forall x \in \mathbb{B}$, $P^{\theta}(X = x) > 0$

donc $\forall k \geq n$, $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) > 0$

Soit $k \geq n$

$\forall t \in \left[\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}\right]$, $0 \leq \frac{k}{n} - t$ donc $\forall t \in \left[\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}\right]$, $0 \leq \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}$

par propriété, $\int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt = 0$ ssi $\forall t \in \left[\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}\right]$, $\left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3} = 0$

ssi $\forall t \in \left[\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}\right]$, $\frac{k}{n} = t$

or il existe $t \in \left[\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}\right]$ tel que $\frac{k}{n} \neq t$

donc $\int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt > 0$ par stricte positivité de l'intégrale

donc $\forall k \geq n$, $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\, dt > 0$

donc $\sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \int_{\nu_0}^{k/n} \left(\frac{1}{n} - t\right) \frac{2}{t^3}\, dt > 0$

ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta,\ b_\theta(U) > 0}$

7)

d'après 4)a), $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E\left(\frac{1}{X_i}\right) = \frac{\theta \ln(\theta)}{\theta - 1}$

comme les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi alors les variables $\left(\frac{1}{X_1}, \dots, \frac{1}{X_n}\right)$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi

les variables $\left(\frac{1}{X_1}, \dots, \frac{1}{X_n}\right)$ sont donc n variables indépendantes de même espérance et de même variance (on admet que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{X_i}$ admet une variance)

d'après la loi faible des grands nombres, $\boxed{(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{P} \frac{\theta \ln(\theta)}{\theta - 1}}$

$U_n = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

or les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont n variables indépendantes de même espérance $\frac{1}{\theta}$ et de même variance

d'après la loi faible des grands nombres, $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{P} \frac{1}{\theta}$

comme la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $\boxed{(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{P} \theta}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie III

8) a) Soit $\theta \in \Theta$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$, $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P^\theta(X_i = x_i)$

or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $([X_i = 0], [X_i = 1])$ est un système complet d'évènements

d'après la formule des probabilités totales,

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P^\theta(X_i = x_i) = P^\theta[([X_i = x_i] \cap (X_i = 0]) \cup ([X_i = x_i] \cap (X_i = 1])]$

$= P^\theta(X_i = 0) P^\theta_{(X_i =}$

b)

d'après 8) a), $\forall \theta \in \Theta$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in B^n$, $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$

posons $g : S(B^n) \times \Theta \to \mathbb{R}_+$
$(S(x_1, \dots, x_n), \theta) \mapsto \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)} = \theta^{S(x_1, \dots, x_n)} \times (1-\theta)^{n - S(x_1, \dots, x_n)}$

g est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car $\theta \in \Theta$

posons $h : B^n \to \mathbb{R}_+$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto 1$

donc $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = g(S(x_1, \dots, x_n), \theta) h(x_1, \dots, x_n)$

ainsi, S est exhaustive

9) a)

$$P^{\theta}_{[S=k]}([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_n=x_n]) = \frac{P^{\theta}([S=k]\cap[X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_n=x_n])}{P^{\theta}(S=k)}$$

$$= P^{\theta}($$

b) Soit $\theta \in \Theta$

$$P^{\theta}_{[S=k]}(X_1=1) = \frac{P^{\theta}([S=k]\cap[X_1=1])}{P^{\theta}(S=k)}$$

$$= \frac{P^{\theta}([\sum_{i=2}^{n} X_i = k-1]\cap[X_1=1])}{P^{\theta}(S=k)}$$

$$= \frac{P^{\theta}(\sum_{i=2}^{n} X_i = k-1)\,P^{\theta}(X_1=1)}{P^{\theta}(S=k)}$$ car les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes donc d'après le lemme des coalitions $\sum_{i=2}^{n} X_i$ est indépendante de X_1

or $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta)$ et $X_2,\ldots,X_n$ sont indépendantes donc $\sum_{i=2}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1,\theta)$ par propriété

de même $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\theta)$

donc $P^{\theta}(\sum_{i=2}^{n} X_i = k-1) = \binom{n-1}{k-1}\theta^{k-1}(1-\theta)^{n-k}$

et $P^{\theta}(S=k) = \binom{n}{k}\theta^{k}(1-\theta)^{n-k}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2020

Épreuve de : MATHS 2 "S" ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

et $P^\theta(X_1 = 1) = \theta$

donc $P^\theta_{[S=k]}(X_1 = 1) = \dfrac{\binom{n-1}{k-1}\theta^{k-1}(1-\theta)^{n-k} \times \theta}{\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}}$

$= \dfrac{\frac{k}{n}\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}}{\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}}$ par propriété

$= \dfrac{k}{n}$

ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta, \ P^\theta_{[S=k]}(X_1 = 1) = \frac{k}{n}}$

10) a) Une colonne de la matrice U contient n réalisations de la loi de Bernoulli de paramètre θ (ici $\theta = 0.3$)

b)

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : | Session : 2020

Épreuve de : MATHS 2 "S" ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie IV

12) a) Soit $u \in s(B^n)$

$E^{\theta}_{[S=u]}(T) = \sum_{x \in T(\Omega)} x \, P^{\theta}_{[S=u]}(T=x)$

or T est un estimateur du paramètre θ donc il existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $T = h(X_1, \dots, X_n)$

donc il existe $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$ tel que $[T=x] = [X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]$

donc $E^{\theta}_{[S=u]}(T) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \in B^n \\ \text{tel que } x = h(x_1,\dots,x_n)}} h(x_1, \dots, x_n) P_{[S=u]}^{\theta}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$

or $\forall (x_1, \dots, x_n) \in B^n$, $P_{[S=u]}^{\theta}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$ ne dépend pas de θ

donc $\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \in B^n \\ \text{tel que } x = h(x_1,\dots,x_n)}} h(x_1, \dots, x_n) P_{[S=u]}^{\theta}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$ ne dépend pas de θ

de plus, T est un estimateur sans biais de θ donc $E^{\theta}(T)$ existe

donc $E^{\theta}_{[S=u]}(T)$ existe par propriété

ainsi, $\forall u \in s(B^n)$, $E_{[S=u]}^{\theta}(T)$ existe et sa valeur ne dépend pas de θ

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b)

$\forall i \in [\![1,n]\!], ([X_i = x_i])_{x_i \in B}$ est un système complet d'événements

donc $([s(X_1,\dots,X_n) = s(x_1,\dots,x_n)])_{(x_1,\dots,x_n)\in B^n}$ est un système complet d'événements

donc $([S = u])_{u \in s(B^n)}$ est un système complet d'événements

ainsi, $\boxed{([S=u])_{u\in s(B^n)} \text{ est un système complet d'événements}}$

13) a)

• d'après 12)b), $([S=u])_{u\in s(B^n)}$ est un système complet d'événements

d'après la formule de l'espérance totale,

$E^\theta(R) = \sum_{u\in s(B^n)} P(S=u)\, E^\theta_{[S=u]}(R)$

$= \sum_{u\in s(B^n)} P(S=u)\, E^\theta_{[S=u]}(r(X_1,\dots,X_n))$

$= \sum_{u\in s(B^n)} P(S=u)\, E_{[S=u]}(T)$ par définition de r

$= E(T)$ d'après la formule de l'espérance totale

$= \theta$ car T est un estimateur sans biais de θ

• $R = r(X_1,\dots,X_n)$ où $r : B^n \to \mathbb{R}$

donc R est un estimateur de θ

ainsi, $\boxed{R \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$

22/27

14) a)

$\forall \theta \in \Theta, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n, \; L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P^\theta (X_i = x_i)$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-n\theta} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

posons $g : s(\mathbb{B}^n) \times \Theta \to \mathbb{R}^+$

$(s(x_1, \dots, x_n), \theta) \mapsto e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} = e^{-n\theta} \theta^{s(x_1, \dots, x_n)}$

g est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car $e^{-n\theta} \geqslant 0$ et $\theta > 0$ donc $\theta^{s(x_1,\dots,x_n)} > 0$

posons $h : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^+$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$

h est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$

donc il existe $g : s(\mathbb{B}^n) \times \Theta \to \mathbb{R}^+$ et $h : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que
$\forall \theta \in \Theta, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n, \; L(x_1, \dots, x_n, \theta) = g(s(x_1, \dots, x_n), \theta) \, h(x_1, \dots, x_n)$

ainsi, $\boxed{S \text{ est exhaustive}}$

b)

$$P^\theta_{[S=n]}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \frac{P^\theta([S=n] \cap [X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])}{P^\theta(S=n)}$$

$$= \frac{P^\theta([\sum_{i=1}^{n} X_i = n] \cap [X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])}{P^\theta(S=n)}$$

$$= P^\theta([X_n = n - \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) Soit $\theta > 0$

Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k = \theta$

comme la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(n\theta)^k}{k!}$ converge (série exponentielle)

alors la série $\sum_{k \geq 0} \theta \frac{(n\theta)^k}{k!}$ converge par propriété

$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \frac{(n\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta \frac{(n\theta)^k}{k!}$

$= \theta \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\theta)^k}{k!}$ par linéarité car la série converge

$= \theta e^{n\theta}$ (série exponentielle)

ainsi, $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $(\forall k \in \mathbb{N}, \varphi_k = \theta)$ est telle que :
$\forall \theta > 0, \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \frac{(n\theta)^k}{k!} = \theta e^{n\theta}$

Posons $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall \theta > 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \frac{(n\theta)^k}{k!} = \theta e^{n\theta}$

alors $\forall \theta > 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \frac{(n\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \frac{(n\theta)^k}{k!}$

comme les séries convergent alors $\forall \theta > 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} (\varphi_k - f_k) \frac{(n\theta)^k}{k!} = 0$ (linéarité)

posons $f :]0, \theta] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (\varphi_0 - f_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\varphi_k - f_k}{k!}\right) (nx)^k$

comme · $\left(\frac{\varphi_k - f_k}{k!}\right)$ est une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{\varphi_k - f_k}{k!}\right) (n\theta)^k$ est absolument convergente avec $\theta > 0$

· $\forall x \in]0, \theta]$, $f(x) = 0$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\varphi_n - \delta_n}{n!} = 0$ d'après 2)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \delta_n$

ainsi, $\boxed{(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est unique}}$