Copie anonyme - n°anonymat : 960004

E9-00159
960004
Maths 2E

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 36 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I)

1)a) f_Z est continue sur $\mathbb{R}$, on note F_Z une de ses primitive, on pose $A \leq x$

on a $\int_A^x f_Z(t) = F_Z(x) - F_Z(A)$

$A \to +\infty \quad = F_Z(x) - 0 \quad = F_Z(x)$

$\int_{-\infty}^x f_Z(t)\,dt$ est bien continue sur $\mathbb{R}$

Donc $\Phi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) > 0$ donc puisque f_Z est ~~une~~ la dérivé de Φ, elle est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~

$\Phi(x) = P(Z \leq x)$ or $P(Z \leq x) \in]0;1[$ comme probabilité

1c). Φ est continue, strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ par théorème de la bijection.

1d. $\forall x \in \mathbb{R}$.

~~$\Phi(-x) = \int$~~

~~$1 - \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$~~

~~$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,dt + \int_{x}^{-\infty} f_Z(t)\,dt$~~

~~$= \int_{-\infty}$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$1-\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,dt + \int_{x}^{-\infty} f_Z(t)\,dt$$

$$= \int_{x}^{+\infty} f_Z(t)\,dt \quad \text{par Chasles.}$$

$$= \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt$$

on pose $u = -x$, changement de variable affine.

① $du = -dt$

② $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$

③ $\int_{x \to -x}^{+\infty \to -\infty}$

Par changement de variable affine on a

$$1-\Phi(x) = \int_{-x}^{-\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \Phi(-x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$

(il aurait fallu poser $A > x$ dans le changement de variable pour faire tendre $A \to +\infty$... je suis allé un peu vite).

2a) $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variable aléatoire, de même loi, indépendantes, de même espérance et de même variances. Donc par ~~th~~ la loi faible des grands nombres

$$\boxed{P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

2b) soit Z_n une suite de variable aléatoire de même loi, de même espérances, de même variances et indépendantes. Alors, par théorème de limite centrale
on a

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} Z \quad \text{ou} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)}$

3) a) $X_i(\Omega) = \{0, 2, 5, 10\}$

$$E(X_i) = 0P(X_i=0) + 2P(X_i=2) + 5P(X_i=5) + 10P(X_i=10)$$
$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{5}\cdot\frac{1}{\cancel{5}} + \cancel{10}\cdot\frac{1}{\cancel{10}}$$
$$= 1 + 1 + 1 = \boxed{3 = E(X_i)}$$

3b) $E(X_i^2) = 0^2P(X_i=0) + 2^2P(X_i=2) + 5^2P(X_i=5) + 10^2P(X_i=10)$
par théorème du transfert

$$= 4P(X_i=2) + 25P(X_i=5) + 100P(X_i=10)$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2} + 25\cdot\frac{1}{5} + 100\cdot\frac{1}{10}.$$
$$= 2 + 5 + 10$$
$$= \boxed{17 = E(X_i^2)}$$

Par König Huygens il vient que :
$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 17 - 3^2 = 17 - 9 = \boxed{8 = V(X_i)}$$

3/3

3c) i) $U \hookrightarrow U_c[0,1]$.

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0;1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

~~$= P(f(U) = x)$ Distinguons les cas.~~

~~si $U \in [0; \frac{1}{5}[$ alors $f(U) = 0$.~~

$\boxed{f(U) = \{0, 2, 5, 10\}}$

- $P(f(U)=0) = P(U \leq \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$
- $P(f(U)=2) = P(\frac{1}{5} \leq U \leq \frac{7}{10}) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$
- $P(f(U)=5) = P(\frac{7}{10} \leq U \leq \frac{9}{10}) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $P(f(U)=10) = P(\frac{9}{10} \leq U \leq 1) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

Bilan : $f(U)$ suit la même loi que X_i

3 c) ii)

```
function x = X()
   U = rand()
if U<1/5 then
 X = 0
 elseif 1/5<U<7/10
 X= 2
 elseif 7/10<U<9/10
  X = 5
 elseif 9/10<U<1
  X = 10
 end
endfunction.
```

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3d). $Z_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right)$

Donc $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de l'espérance

$= \boxed{3n}$.

$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ car les X_i sont indépendantes

$= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \boxed{8n}$

Donc $Z_n = S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \boxed{\dfrac{S_n - 3n}{\sqrt{8n}}}$

3e) $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$P(S_{200} \leq 900) = P\left(\dfrac{S_{200} - 3.200}{\sqrt{8.200}} \leq \dfrac{900 - 3.200}{\sqrt{8.200}}\right)$

$= P\left(Z_{200} \leq \dfrac{900 - 600}{\sqrt{4.2.200}}\right)$

$= P\left(Z_{200} \leq \dfrac{100}{2\sqrt{400}}\right) = P\left(Z_{200} \leq \dfrac{100}{2.\sqrt{4.100}}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= P\left(Z_{200} \leq \frac{-100}{4\sqrt{100}}\right) = P\left(Z_{200} \leq \frac{-100}{4 \cdot 10}\right)$

$= P\left(Z_{200} \leq -\frac{10 \cdot 10}{4 \cdot 10}\right) = \boxed{P(Z_{200} \leq -2{,}5) \underset{+\infty}{=} \Phi(-2{,}5)}$

puisque pour n suffisamment grand, $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}oi} Z$

4|a) Puisque Z_n converge en loi vers $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a par définition de la limite et sachant que $\Phi(x_k) = \frac{k}{2N}$

$\exists n_0$ tel que $n \geq n_0$.

$$\boxed{\max_{k \in \{0, \dots, 2N\}} |P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)| \leq \frac{1}{2N}.}$$

4(b) i) . $k \in \{1, \dots, 2N\}$. et $x \in I_k$
Soit $n \geq n_0$).

$x \in]x_{k-1}, x_k[$
Donc $x < x_k$.
Donc $(Z_n \leq x) \subset (Z_n \leq x_k)$.
Par la croissance de la probabilité on a

$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$

or $x \in]x_{k-1}, x_k]$
Donc $x_{k-1} < x$
Donc $(Z \leq x_{k-1}) \subset (Z \leq x)$ par la croissance de la proba on a

6 / 18

$\Phi(x_{k-1}) \leq \Phi(x)$.

$\Leftrightarrow -\Phi(x_{k-1}) \geq -\Phi(x)$

Il vient alors que:

$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$

$\Rightarrow P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1})$

$\Rightarrow \boxed{P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1})}$

4 b) ii).

$P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1})$

pour n suffisamment grand on a:

$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})$

$= \dfrac{k}{2N} - \dfrac{k-1}{2N}$

$= \dfrac{k-k+1}{2N} = \dfrac{1}{2N}$

or $\dfrac{1}{2N} + \dfrac{1}{2N} = \dfrac{1}{N}$.

Donc on a bien $\boxed{P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}}$

puisque on passe à la limite il est clair que

$\boxed{P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1}) \leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})}$

4 b) iii).

Admettons $\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{N}$.

4c) on sait que, $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\forall n \geq n_0$

$$\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{N}$$

et $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \frac{1}{N}$.

Ainsi par définition, on a :

$$|P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{N}$$

4d). ~~on peut choisir $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n = \frac{1}{n}$.~~

5)a) i) Φ étant continue sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$$

5a) ii). $|P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq u_n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

~~Ainsi par~~ Ainsi on peut écrire

$$|P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| \leq u_n$$

et par théorème d'encadrement, car $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} |P(Z_n \leq x_n - \Phi(x_n)| = 0$$

5a) iii) on a bien, d'après ce qui précède

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \leq x_n) = \lim_{n \to +\infty} \Phi(x_n) \neq \Phi(x)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5 a) iii) Bilan : $\boxed{P(Z_n \leq x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(x)}$

5 b) i). $\forall n \geqslant 1$.

$$(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \subset (Z_n < x)$$

Par croissance de la probabilité on a :

$$P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \leq P(Z_n < x)$$

or $(Z_n < x) \subset P(Z_n \leq x)$

À nouveau par croissance de la probabilité

$$P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \ P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \leq P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)}$$

5 b) ii). Par théorème d'encadrement, il vient alors que, puisque $P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(x)$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(Z_n < x) = \Phi(x)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5c).

$P(Z_n \in [a,b]) = P(a \leq Z_n \leq b)$
$= P(Z_n \leq b) - P(Z_n \leq a)$

Par passage à la limite on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \in [a,b]) = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

Partie II /

6a) $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

$E(X_i) = p$, $V(X_i) = p(1-p)$. d'après le cours.

Démonstration

$E(X_i) = 0P(X_i = 0) + 1P(X_i = 1) = p$
$E(X_i^2) = 1P(X_i = 1) = p$
$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$ par König-Huygens
$= p - p^2$
$= p(1-p)$

6b) $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$

~~Posons~~

Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x(1-x) = x - x^2$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme polynome
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - 2x$
on résout $1 - 2x > 0$
$\Rightarrow 1 > 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} > x$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Par application de $x \to \sqrt{x}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

on a $\boxed{\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Donc $\boxed{\sigma = \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}}$

6) c). $E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ par linéarité de l'espérance.

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\, p \cdot \cancel{n} = \boxed{p = E(\overline{X_n})}$$

6 d). $V(\overline{X_n}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

- par la forme quadratique de la variance
- car les X_i sont indépendantes

Donc $V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\, n.\, p(1-p)$

$$= \frac{1}{n}\, p(1-p) = \boxed{\frac{1}{n}\sigma^2 = V(\overline{X_n})}$$

7) a) $\forall a > 0$.

on note $\overline{X_n}^* = \dfrac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sigma(\overline{X_n})}$

$= \dfrac{\overline{X_n} - p}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2}} = \left(\dfrac{\overline{X_n} - p}{\sigma}\right)(\sqrt{n})$

on sait $\overline{X_n}$ est une suite de variable aléatoire, indépendante, de même loi, de même variance, par théorème limite centré, $\overline{X_n}^* \xrightarrow[n \to +\infty]{Loi} Z_n$, où $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Donc :

$P(\overline{X_n}^* \in [-a, a])$

$= P\left(\sqrt{n}\dfrac{(\overline{X_n} - p)}{\sigma} \in [-a, a]\right)$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(\left(\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X_n} - p}{\sigma}\right)\right) \in [-a, a]\right) = \Phi(a) - \Phi(-a).}$$

on travaille dans la probabilité ; par n suffisamment grand

7b). $P\left(-a \leq \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X_n} - p)}{\sigma} \leq a\right) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a))$

$\Rightarrow P(-a\sigma \leq \sqrt{n}(\overline{X_n} - p) \leq \sigma a) = 2\Phi(a) - 1)$ car $\sigma > 0$.

$\Rightarrow P\left(\dfrac{-a\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X_n} - p \leq \dfrac{\sigma a}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(a) - 1$ $\sqrt{n} > 0$.

$\Rightarrow P\left(\dfrac{-a\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X_n} \leq -p \leq \dfrac{\sigma a}{\sqrt{n}} - \overline{X_n}\right) = 2\Phi(a) - 1.$

$\Rightarrow P\left(\overline{X_n} - a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq p \leq \overline{X_n} + a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(a) - 1.$

12/

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques LE ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, X_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 2\Phi(a) - 1}$$

7c). on remarque que $2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$

Ainsi, pour n suffisament grand,

$$\boxed{P\left(p \in \left[\overline{X_n} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X_n} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0,95}$$

7d). on sait que $\sigma \leq \frac{1}{2}$. , Donc $1,96\sigma \leq 0,98$

Ainsi, il vient que.

$$\left(p \in \left[\overline{X_n} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X_n} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \subset \left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Par croissance de la probabilité.

$$\boxed{0,95 \leq P\left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]\right)}$$

8) $\forall n \geq 1$,

a) $V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n}$

$= \overline{X_n}(1-\overline{X_n}) \cancel{+\frac{1}{n}} - p(1-p) \cancel{-\frac{1}{n}}$

$= \overline{X_n}(1-\overline{X_n}) - p(1-p)$

$= \overline{X_n} - \overline{X_n}^2 - p + p^2$

or on remarque que

$(\overline{X_n} - p)(1 - \overline{X_n} - p) = \overline{X_n} \cancel{-p\overline{X_n}} - \overline{X_n}^2 - p \cancel{+p\overline{X_n}} + p^2$

$= \overline{X_n} - \overline{X_n}^2 - p + p^2$

Donc $\boxed{V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n} = (\overline{X_n} - p)(1 - \overline{X_n} - p)}$

8b). $V_n - \sigma^2 = (\overline{X_n} - p)(1 - \overline{X_n} - p) + \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow V_n - \sigma^2 = (\overline{X_n} - p)(1 - \overline{X_n} - p) + \frac{1}{n}$.

Prouvons que:

$4(\overline{X_n} - p) + \cancel{\frac{1}{n}} \geq (\overline{X_n} - p)(1 - \overline{X_n} - p) + \cancel{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow 4\overline{X_n} - 4p \geq \overline{X_n} - \overline{X_n}^2 - p + p^2$

$\Rightarrow \overline{X_n}^2 + 3\overline{X_n} - 3p - p^2 \geq 0$.

$\Rightarrow \overline{X_n}^2 - p^2 + 3\overline{X_n} - 3p \geq 0$.

$\Rightarrow (\overline{X_n} - p)(\overline{X_n} + p) + 3(\overline{X_n} - p) \geq 0$.

$(\overline{X_n}-p)(\overline{X_n}+p+3) \geq 0$

$\overline{X_n}-p \geq 0$?

Admettons $|V_n - \sigma^2| \leq 2|\overline{X_n}-p| + \frac{1}{n}$

8c). $(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \subset (2|\overline{X_n}-p| + \frac{1}{n} > \varepsilon)$

Par croissance de la probabilité on a :

$P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leq P(2|\overline{X_n}-p| + \frac{1}{n} > \varepsilon)$

$\Rightarrow P(|V_n - \sigma^2 > \varepsilon) \leq P\left(2|\overline{X_n}-p| > \varepsilon - \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \boxed{P(|V_n - \sigma^2 > \varepsilon) \leq P\left(|\overline{X_n}-p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right)}$

8)d/. $\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2n}$

Il vient alors que, pour n assez grand.

$\left(|\overline{X_n}-p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \subset \left(|\overline{X_n}-p| > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2n}\right)$

Par croissance de la probabilité.

$P\left(|\overline{X_n}-p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \leq P\left(|\overline{X_n}-p| > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2n}\right)$

pour n assez grand $\frac{1}{2n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

on a alors

$\boxed{P\left(|\overline{X_n}-p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \leq P\left(|X_n-p| > \frac{\varepsilon}{4}\right)}$

8) e). $\forall \varepsilon > 0$.

on sait que $P\left(|\overline{X_n} - p| > \frac{\varepsilon}{4}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

par la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers son espérance p.

(Le théorème s'applique car $\overline{X_n}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes, de même loi, de même espérance et variance).

or $0 \leq P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leq P\left(|\overline{X_n} - p| > \frac{\varepsilon}{4}\right)$

car c'est une probabilité

Donc par théorème d'encadrement.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) = 0}$$

9) a) i). $W_n = \frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} Z_n$.

$P(W_n \leq x) = P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} Z_n \leq x\right)$.

on $Z_n \leq (1+\varepsilon)x$

et $\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}$ par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

il vient alors que.

$\frac{\sigma}{V_n} Z_n \leq \frac{(1+\varepsilon)x}{(1+\varepsilon)} = x$.

$\Rightarrow (W_n \leq x)$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi on a :

$$\left((Z_n \leq (1+\varepsilon)x) \cap \left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} < \frac{1}{1+\varepsilon} \right) \right) = (W_n \leq x)$$

car si $Z_n \leq (1+\varepsilon)x$ et si $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}$ sont réalisé alors $W_n \leq x$ l'est.

or $P\left((Z_n \leq (1+\varepsilon)x) \cup \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right)$ par la formule de Crible on a.

$$= P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right) - \underbrace{P\left((Z_n \leq (1+\varepsilon)x) \cap \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right)}_{= P(W_n \leq x)}$$

or puisqu'il s'agit d'une probabilité on peut écrire :

$$0 \leq P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right) - P(W_n \leq x)$$

$$\text{E)}\ P(W_n \leq x) \leq P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{\text{F)}\ P(W_n \leq x) \leq P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right)}$$

$\Rightarrow$ décroissance de l'inverse

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\mathbb{R}^{+}_{*}$.

g) a) ii).

$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right)$

g) a) iii). (Z_n) est une suite de variable aléatoire indépendante, de même loi, même variance, même espérance.
Par théorème de limite centrée
$Z_n \xrightarrow[+\infty]{loi} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) = \Phi((1+\varepsilon)x)}$

g) a) iv). Par définition de la limite.
$\exists\, n_\varepsilon$ telle que $n \geq n_\varepsilon$.

$|P(W_n \leq x) - P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x)| \leq \varepsilon + 0 = \varepsilon$.

$\Rightarrow |P(W_n \leq x) - \Phi((1+\varepsilon)x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{P(W_n \leq x) \leq \varepsilon + \Phi((1+\varepsilon)x)}$

g) b). Ainsi on peut écrire, d'après ce qui est admis.
$\exists\, n_0 > n_\varepsilon$ tel que :
$|P(W_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \varepsilon$.

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(W_n \leq x) = \Phi(x)}$

10) $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\cancel{\begin{aligned}
&P\left(\rho \geq \overline{X_n} - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right)\\
&= P\left(\rho \geq \overline{X_n} - x\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\rho)}{\sqrt{n}\,W_n}\right)\\
&= P\left(\rho \geq \overline{X_n} - \frac{x(\overline{X_n}-\rho)}{W_n}\right)\\
&= P\left(\rho \geq \frac{W_n\overline{X_n} - x(\overline{X_n}-\rho)}{W_n}\right)\\
&= P\left(\rho \geq \frac{W_n\overline{X_n} - x\overline{X_n} + \rho x}{W_n}\right)\\
&\Rightarrow P\left(W_n \geq \frac{W_n\overline{X_n} - x\overline{X_n} + \rho x}{\rho}\right)\\
&\Rightarrow P\left(W_n \geq \frac{\overline{X_n}(W_n - \rho x)}{\rho} + x\right)
\end{aligned}}$$

$$\cancel{\sqrt{V_n} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\rho)}{W_n}}$$

10) a)

$$P\left(\rho \geq \overline{X_n} - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} \geq \overline{X_n} - \rho\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}\,x} \leq \frac{1}{\overline{X_n}-\rho}\right)$$ par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}^+_*$.

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{x}{\overline{X_n}-\rho}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}(\overline{X_n}-\rho) \leq x\right)$$

$$\boxed{= P(W_n \leq x) \xrightarrow[+\infty]{} \Phi(x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a bien $\boxed{P\left(\rho \geq \overline{X_n} - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \Phi(x)}$

10 b). $W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Donc on sait que $p \geq \frac{1}{2}$ et $n = 1000$,

$\overline{X_n} = 0{,}52$.

pour n très grand

$P(W_n \leq x) = \Phi(x)$.

$\cancel{\Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}(0{,}52 - p) \leq \right)}$

car $p \geq \frac{1}{2}$ et $\overline{X_n} = 0{,}52$

$$P(\overline{X_n} \leq x) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}(\overline{X_n} - p) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$n = 1000$, $V_n \simeq 0{,}2506$

$$= P\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}(\overline{X_{1000}} - p) \leq \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow P\left(W_{1000} \leq \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

pour n suffisamment grand :

$$\boxed{P\left(W_{1000} \leq \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)\right)}$$

$\simeq 0{,}9$

11)

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

11) a) · $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$.

~~XX~~ $(Y_i = 1)$, la persomme a déclaré voter pour A.

· Soit, la persomme déclare voter pour A et vote A
· Soit la persomme déclare voter pour A et vote B. (elle change d'avis)

$P(Y_i=1) = P((X_i = 1, T_i = 0) \cup (X_i = 0, T_i = 1))$

$= P(X_i=1)P(T_i=0) + P(X_i=0)P(T_i=1)$
par union disjointe, et indépendante des X_i, T_i,

$= p\cdot(1-q) + (1-p)(q)$

$= p - pq + q - pq$

$= p+q.$

$P(Y_i=0) = 1 - P(Y_i=1) = 1-p-q$

$\boxed{Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p+q) \qquad r = p+q}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11b).

11d).

$\mathrm{D} \Big| \quad \dfrac{\sqrt{1000}}{}$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 ESSEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 3.

12) a) i).

$\int_0^1 u^3(1-u)^3\,du$

~~on pose $u(x)=u^3$ $u'(x)=3u^2$.~~
~~$v'(x)=-(-(1-u)^3)$ $v(x)=-\left(\frac{(1-u)^4}{4}\right.$~~

on pose $u(x)=(1-u)^3$ $u'(x)=3(-1)(1-u)^2$
$v'(x)=u^3$ $v(x)=\frac{u^4}{4}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par intégration par parties on a :

$= \underbrace{\left[(1-u)^3\frac{u^4}{4}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{u^4\,3(-1)}{4}(1-u)^2\,du$

$= \frac{3}{4}\int_0^1 (1-u)^2 u^4\,du.$

on pose $u(x)=(1-u)^2$ $u'(x)=-2(1-u)$
$v'(x)=u^4$ $v(x)=\frac{u^5}{5}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par IPP on a :

$$\frac{3}{4}\left[\underbrace{\left[(1-u)^2\frac{u^5}{5}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -\frac{2u^5}{5}(1-u)\,du\right)$$

$$= \frac{6}{20}\int_0^1 u^5(1-u)\,du$$

On pose $u(x) = 1-u$ $\quad u'(x) = -1.$

$v'(x) = u^5$ $\quad v(x) = \frac{u^6}{6}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par IPP on a

$$= \frac{6}{20}\left[\underbrace{\left[(1-u)\frac{u^6}{6}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -1\,\frac{u^6}{6}\,du\right]$$

$$= \frac{\cancel{6}}{20}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\int_0^1 u^6\,du$$

$$= \boxed{\frac{1}{20}\int_0^1 u^6\,du = \int_0^1 u^3(1-u)^3\,du}$$

12) a) ii) $\frac{1}{20}\int_0^1 u^6\,du = \frac{1}{20}\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{20\cdot 7} = \frac{1}{140}$

Donc $\boxed{\int_0^1 u^3(1-u^3)\,du = \frac{1}{140}}$

12) b) en 0 :

$$140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \xrightarrow[z \to 0]{} 0 = h(0)$$

Donc h est continue en 0.

en 1 : $140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \xrightarrow[z \to 1]{} \frac{1}{140} \cdot 140$

$= 1 = h(1)$

Donc h est continue en 1.

or $\forall x \in]0;1[$ $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est une fonction continue qui admet des primitives on note U l'une d'entre elles.

$$140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du = 140\left(U(z) - U(0)\right)$$

h est continue sur $]0,1[$ comme ~~fonction~~ différence de fonctions continues.

Il vient alors que h est continue sur $\mathbb{R}$.

12) c). $\forall u \in]0, z[$ où $z \in]0;1[$.

$$u^3(1-u)^3 > 0.$$

Les fonctions intégrées sont continues, $0 < z$, par croissance et positivité de l'intégrale on a.

$$\int_0^z u^3(1-u)^3 du \geq 0$$

$$140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \geq 0$$

: $\forall z \in \mathbb{R}$, on a bien $\boxed{0 \leq h(z)}$

~~or puisque la fonction $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est strictement positive sur $]0;1[$.~~

~~on a :~~

or $u \mapsto u^3(1-u)^3 > 0$ sur $]0;1[$.

on a $\int_0^1 u^3(1-u)^3 du \geq \int_0^z u^3(1-u)^3 du$.

$\Rightarrow 140 \cdot \frac{1}{140} \geq \frac{1}{140} \int_0^z u^3(1-u)^3 du$

$\Rightarrow \boxed{1 \geq h(z)}$ car $z \in]0;1[$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(z) \leq 1$.

13) a) i). g_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions continues.

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(z) \leq 1$.

$z = \frac{1}{a_n}(z-x)$

or a $0 \leq h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) \leq 1$.

$\Rightarrow 0 \geq -h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) \geq -1$. $\times(-1)$.

$\Rightarrow 1 \geq 1 - h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) \geq 0$.

$\Rightarrow \boxed{1 \geq g_n(z) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$.

13

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

1 3)a)ii)

13 b) i)

• si $z \leq x$
$\Leftrightarrow z - x \leq 0$.

Alors $\frac{1}{a_n}(z-x) \leq 0$.

Donc $1 - h\Big(\underbrace{\frac{1}{a_n}(z-x)}_{\leq 0}\Big) = 1 - 0 = \boxed{1 = g_n(z)}$

• en revanche si $z > x + a_n$
$\Leftrightarrow z - x > a_n$
$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n}(z-x) > 1$.

$h\Big(\underbrace{\frac{1}{a_n}(z-x)}_{>1}\Big) = 1$.

Donc $1 - h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) = 1 - 1 = \boxed{0 = g_n(z)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13) b)ii) $\forall$ la va X..

14) a).

$\frac{1}{2}\int_z^{z+u}(z+u-t)^2 g'''(t)dt$

$u(t)=(z+u-t)^2$ $u'(t)=(-1)(2)(z+u-t)$

$v'(t)=g'''(t)$ $v(t)\ g''(t)$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par IPP on a :

$\frac{1}{2}\left[\left[(z+u-t)^2 g''(t)\right]_z^{z+u} + \int_z^{z+u} 2(z+u-t)g''(t)dt\right.$

$=\frac{1}{2}\left(-u^2 g''(z) + \int_z^{z+u} 2(z+u-t)g''(t)dt\right)$

$=-\frac{1}{2}u^2 g''(z) + \frac{1}{\cancel{2}}\int_z^{z+u}\cancel{2}(z+u-t)g''(t)dt.$

~~on pose~~ $=-\frac{1}{2}u^2 g''(z) + \int_z^{z+u}(z+u-t)g''(t)dt$

$u(t)=(z+u-t)$ $u'(t)=-1$

$v'(t)=g''(t)$ $v(t)=g'(t)$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, par IPP on a.

$-\frac{1}{2}u^2 g''(z) + \left[(z+u-t)g'(t)\right]_z^{z+u} + \int_z^{z+u} g'(t)dt)$

$=-\frac{1}{2}u^2 g''(z) \cancel{+}\ u g'(z) + \left[g(t)\right]_z^{z+u}$

$$= -\frac{1}{2}v^2 g''(z) - vg'(z) + g(z+v) - g(z)$$

$$= \frac{1}{2}\int_z^{z+v} (z+v-t)^2 g'''(t)\,dt$$

14) b) . on pourrait utiliser la relation des Chasle pour démontrer le résultat, en découpant les parties

$z \to z+u$ et $z \to z+v$ ... dans $R(z,u,v)$ et réécrire avec ce qui précède. ? les intégrales.

15) a) i) $y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$\sum_{i=1}^{m} y_i$ est encore une loi normale d'après le cours, car la loi normale est stable par la somme.

D'ailleurs $E\left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right) = 0$

$V\left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right)$ par indépendance des y_i.

$= m$

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^{m} y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, m)}$

15) a) ii). $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

T_n suit une loi normale d'après le cours

$E(T_n) = 0.$

$V\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n} V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$

par la forme quadratique de la variance, par indépendance des Y_i on a.

$V(T_n) = 1$

$\boxed{T_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

15 b) i) $W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + \underline{\underline{Y_k}} + X_{k+1} + \dots + X_n)$

Or $W_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + \underline{Y_k} + \underline{X_{k+2}} + \dots + X_n)$

Donc $W_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + \underline{Y_k} + X_{k+1} \dots + X_n)$

Donc on a bien.

$\boxed{W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k = W_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESFC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15) e) Admettons

$0 \leq \left| E(g_n(Z_n)) - E(g_n(T_n)) \right| \leq \frac{1}{6\sqrt{n}} M_{g'''} \left(E(|X_1|^3) + E(|Y_1|^3) \right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

car valeur absolue toujours $\boxed{\geq 0}$

15) f) Par théorème d'encadrement

$$\boxed{\left| E g_n(Z_n) - E g_n(T_n)) \right| \xrightarrow[+\infty]{} 0}$$